



Equazioni di evoluzione: risultati recenti e prospettive

Lecce, 18-19 Giugno 2018

Relatori

Luca Lorenzi (Parma)

Alessandra Lunardi (Parma)

Michele Miranda (Ferrara)

Enrico Priola (Torino)

Abdelaziz Rhandi (Salerno)

Organizzatori

Luciana Angiuli (Salento)

Chiara Spina (Salento)

Equazioni di evoluzione: risultati recenti e prospettive

Dipartimento di Matematica e Fisica "E. De Giorgi" (Aula R. Anni)

Lecce, 18-19 Giugno 2018

Lunedì 18 Giugno

9.15 *Saluti*

9.30-10.20 Alessandra Lunardi: *BV functions in Hilbert spaces*

10.30-10.55 Antonio Leaci: *Spazi di Sobolev frazionari e funzioni a variazione limitata in una variabile*

11.00-11.30 *Pausa caffè*

11.30-12.20 Enrico Priola: *Gradient estimates for SDEs without monotonicity type conditions*

12.30-12.55 Simone Ferrari: *Gradient estimates on infinite dimensional convex domains and their consequences*

13.00-15.00 *Pausa pranzo*

15.00-15.25 Gianluca Cappa: *On the Hamilton-Jacobi-Bellman equation on the half-plane of a Hilbert space*

15.30-16.20 Michele Miranda: *Properties of Convex sets in Wiener spaces*

16.30-17.00 *Pausa caffè*

17.00-17.25 Vita Leonessa: *Su problemi di evoluzione associati ad operatori differenziali di tipo Fleming-Viot*

17.30-17.55 Mirella Cappelletti Montano: *Operatori differenziali ellittici e semigruppì positivi associati ad operatori di tipo Kantorovich*

20.30 *Cena sociale*

Martedì 19 Giugno

9.00- 09.50 Abdelaziz Rhandi: *L^p -theory for Schrödinger systems*

10.00- 10.50 Luca Lorenzi: *Sistemi di equazioni di Kolmogorov*

11.00-11.30 *Pausa caffè*

11.30- 11.55 Martina Magliocca: *Comparison results for a parabolic Cauchy-Dirichlet problem with superlinear gradient growth.*

12.00- 12.25 Davide Addona: *Instabilità per un problema di combustione a due interfacce libere*

12.30- 12.55 Federica Gregorio: *Bi-Laplacians on graphs and networks*

13.00 *Saluti*

Equazioni di evoluzione: risultati recenti e prospettive

Abstract of talks

Lecce, 18-19 Giugno 2018

Alessandra Lunardi–Università di Parma

BV functions in Hilbert spaces

I will present the basic theory of bounded variation functions in Hilbert spaces endowed with good probability measures. This is the object of a joint paper in collaboration with G. Da Prato.

Antonio Leaci–Università del Salento

Spazi di Sobolev frazionari e funzioni a variazione limitata in una variabile

Nel seminario sono presentati alcuni risultati riguardanti gli spazi di funzioni di una variabile con derivate frazionarie nel senso di Riemann-Liouville, lo spazio BV delle funzioni a variazione limitata e lo spazio SBV. Viene presentato un teorema di immersione per SBV, mentre il problema rimane aperto per BV. I risultati sono stati ottenuti in collaborazione con M.Bergounioux, G.Nardi e F.Tomarelli.

Enrico Priola–Università di Torino

Gradient estimates for SDEs without monotonicity type conditions

We prove gradient estimates for transition Markov semigroups (P_t) associated to SDEs driven by multiplicative Brownian noise having possibly unbounded C^1 -coefficients, without requiring any monotonicity type condition. In particular, first derivatives of coefficients can grow polynomially and even exponentially. We establish pointwise estimates with weights for $D_x P_t \varphi$ of the form

$$\sqrt{t} |D_x P_t \varphi(x)| \leq c(1 + |x|^k) \|\varphi\|_\infty,$$

$t \in (0, 1]$, $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$. To prove the result we use two main tools. First, we consider a Feynman–Kac semigroup with potential V related to the growth of the coefficients and of their derivatives for which we can use a Bismut–Elworthy–Li type formula. Second, we introduce a new regular approximation for the coefficients of the SDE. At the end of the paper we provide an example of SDE with additive noise and drift b having sublinear growth together with its derivative such that uniform estimates for $D_x P_t \varphi$ without weights do not hold. This is a joint work with G. Da Prato (Pisa).

Simone Ferrari–Università del Salento

Gradient estimates on infinite dimensional convex domains and their consequences

Let X be a separable Hilbert space endowed with a non-degenerate centered Gaussian measure γ , we let λ_1 be the maximum eigenvalue for the covariance operator associated with γ . The associated Cameron–Martin space is denoted by H . Consider a sufficiently regular convex function $U : X \rightarrow \mathbb{R}$ and a convex set $\Omega \subseteq X$. We let $\nu = e^{-U} \gamma$ and let $(T_\Omega(t))_{t \geq 0}$ be the semigroup generated by the self-adjoint operator defined via the quadratic form

$$(\psi, \varphi) \mapsto \int_\Omega \langle \nabla_H \psi, \nabla_H \varphi \rangle_H d\nu,$$

where φ and ψ belong to $D^{1,2}(\Omega, \nu)$, the Sobolev space defined as the domain of the closure of the gradient operator along H in $L^2(\Omega, \nu)$.

In this talk we will show that for any $p \in [1, +\infty)$

$$|(D_H T_\Omega(t)f)(x)|_H^p \leq e^{-p\lambda_1^{-1}t} (T_\Omega(t)|D_H f|_H^p)(x), \quad t > 0, \nu\text{-a.e.}, x \in \Omega, \quad (1)$$

where (1) is true for every $f \in D^{1,p}(\Omega, \nu)$. As an application of (1) we get the logarithmic Sobolev inequality for functions in $D^{1,p}(\Omega, \nu)$, and some standard consequences, like the hypercontractivity of $(T_\Omega(t))_{t \geq 0}$ and the Poincaré inequality.

Furthermore if we assume a polynomial growth for U , then we will show that if $u \in L^2(X, \nu) \cap BV(X, \nu)$, it holds

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_\Omega |D_H T_\Omega(t)u|_H d\nu = |D_\nu u|(\Omega),$$

where $|D_\nu u|$ denotes the total variation of u .

Gianluca Cappa–Università LUISS, Roma

On the Hamilton-Jacobi-Bellman equation on the half-plane of a Hilbert space

In this talk I show some new results on the solution the HJB equation in $C_b(H_+)$. In particular I study

$$v_t(t, x) = Lv(t, x) := \frac{1}{2} \text{Tr}[QD^2v(t, x)] + \langle Dv(t, x), Ax \rangle \quad x \in H_+, \quad t > 0,$$

where H_+ is the half-plane of a Hilbert space H . Under some "necessary" assumptions on Q , A and H_+ , I prove the existence of the mild solution for that problem, and the gradient estimate for the semigroup associated to the operator L .

Michele Miranda–Università di Ferrara

Properties of Convex sets in Wiener spaces

We show some recent results on convex sets in Wiener spaces. We characterize the essential and reduced boundary of open convex sets and investigate integration by parts formulae. Of particular interest is the investigation of trace theorems for functions of bounded variation on boundaries of subsets in Wiener spaces.

Vita Leonessa– Università della Basilicata

Su problemi di evoluzione associati ad operatori differenziali di tipo Fleming-Viot

In questo seminario prenderemo in considerazione la classe di operatori differenziale ellittici del secondo ordine degeneri definiti ponendo, per ogni $u \in C^2([0, 1]^d)$ e per ogni $x = (x_1, \dots, x_d) \in [0, 1]^d$ ($d \geq 1$),

$$A(u)(x) = \sum_{i=1}^d x_i(1-x_i) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) + [a_i + 1 - (a_i + b_i + 2)x_i] \frac{\partial u}{\partial x_i}(x),$$

dove $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ sono tali che $a_i > -1$ e $b_i > -1$ per ogni $i = 1, \dots, d$.

Tali operatori emergono nella teoria dei processi di Fleming-Viot applicata ad alcuni modelli di dinamica delle popolazioni. Essi sono stati oggetti di studio in diversi lavori, sia nel contesto di semplici che in quello di ipercubi.

Attraverso l'utilizzo di tecniche di teoria dell'approssimazione, vedremo che tali operatori generano semigruppì positivi sia nello spazio delle funzioni continue che in spazi L^p pesati rispetto ad opportuni pesi di Jacobi. Inoltre forniremo una formula di approssimazione per tali semigruppì attraverso una successione di operatori lineari e positivi che generalizza gli operatori di Bernstein-Durrmeyer con pesi di Jacobi su $[0, 1]$. Grazie a tale formula saremo in grado di effettuare un'analisi qualitativa dei semigruppì generati e, di conseguenza, anche delle soluzioni dei problemi di evoluzione corrispondenti.

Tutti i risultati presentati sono contenuti in F. Altomare, M. Cappelletti Montano and V.L.: *On the positive semi groups generated by Fleming-Viot type differential operators*, accettato per la pubblicazione su Comm. Pure Appl. Anal.

Mirella Cappelletti Montano–Università di Bari

Operatori differenziali ellittici e semigruppì positivi associati ad operatori di tipo Kantorovich

In questa comunicazione (cfr. [2]), usando tecniche di Teoria dell'Approssimazione, dimostreremo che una ampia classe di operatori differenziali ellittici del secondo ordine (pre)genera un semigruppò di Markov; tale semigruppò può essere approssimato tramite opportuni operatori lineari positivi (cfr. [1]) che, in svariati contesti, costituiscono una generalizzazione degli operatori di Kantorovich. Inoltre, studieremo alcune proprietà dei suddetti semigruppì, come la loro invarianza rispetto a

funzioni convesse o lipschitziane; queste proprietà determinano proprietà spaziali per le soluzioni delle equazioni di evoluzione governate dagli operatori differenziali ellittici sopra menzionati.

L'analisi è condotta nel contesto dello spazio $C(K)$ delle funzioni continue su un arbitrario sottoinsieme convesso compatto K di \mathbf{R}^d , avente interno non vuoto e frontiera non necessariamente regolare e, in alcuni casi particolari, in $L^p(K)$.

Gli operatori differenziali in esame sono della forma

$$V(u)(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (T(pr_i pr_j)(x) - x_i x_j) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d a(b_i - x_i) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

($u \in C^2(K)$, $a \geq 0$, $b = (b_1, \dots, b_d) \in K$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in K$), ove T è un fissato operatore di Markov su $C(K)$, pr_i è la i -sima proiezione canonica e i coefficienti a , b_i sono correlati alla definizione degli operatori approssimanti di tipo Kantorovich.

I risultati generali si possono applicare in molti contesti, quali sfere e ellissoidi, l'intervallo $[0, 1]$, semplici e ipercubi; in questi ultimi casi, i corrispondenti operatori differenziali appartengono alla classe degli operatori di tipo Fleming-Viot.

Lavoro in collaborazione con F. Altomare, V. Leonessa and I. Raşa, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi "A. Moro" di Bari

-
- [1] F. Altomare, M. Cappelletti Montano, V. Leonessa and I. Raşa, *A generalization of Kantorovich operators for convex compact subsets*, Banach J. Math. Anal. **11** (3) (2017), 591-614.
 - [2] F. Altomare, M. Cappelletti Montano, V. Leonessa and I. Raşa, *Elliptic differential operators and positive semigroups associated with generalized Kantorovich operators*, J. Math. Anal. Appl. **458** (1) (2018), 153-173.

Abdelaziz Rhandi–Università di Salerno

L^p-theory for Schrödinger systems

In this talk we study for $p \in (1, +\infty)$ the L_p -realization of the vector-valued Schrödinger operator $Lu := \operatorname{div}(Q\nabla u) + Vu$. Using a noncommutative version of the DoreVenni theorem due to Monniaux and Prüss, and a perturbation theorem by Okazawa, we prove that L_p , the L^p -realization of L , defined on the intersection of the natural domains of the differential and multiplication operators which form L , generates a strongly continuous contraction semigroup on $L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$. We also study additional properties of the semigroup such as positivity, ultracontractivity, Gaussian estimates and compactness of the resolvent. We end the talk by giving several examples and counterexamples. The talk is based on two joint works, the first with Markus Kunze, Luca Lorenzi and Abdallah Maichine, and the second in collaboration with Abdallah Maichine.

Luca Lorenzi–Università di Parma

Sistemi di equazioni di Kolmogorov

In questa comunicazione presenteremo alcuni risultati recenti relativi a sistemi di equazioni di Kolmogorov e ai sistemi di misure invarianti ad essi associati.

Martina Magliocca–Università di Tor Vergata, Roma

Comparison results for a parabolic Cauchy-Dirichlet problem with superlinear gradient growth

Let $N \geq 2$, $1 < p < N$, Ω be a bounded subset of \mathbb{R}^N , $T > 0$ and $Q_T = (0, T) \times \Omega$.

Our goal is proving *comparison results* for nonlinear parabolic problems of Cauchy-Dirichlet type whose general model is given by

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div} a(t, x, \nabla u) = H(t, x, \nabla u) & \text{in } Q_T, \\ u = 0 & \text{on } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

The divergence operator satisfies classical Leray-Lions structural assumptions, while the r.h.s. is supposed to grow at most as a power of the gradient:

$$\exists \gamma > 0 : \quad |H(t, x, \xi)| \leq \gamma |\xi|^q + f. \quad (2)$$

The initial datum $u_0 = u_0(x)$ and the forcing term $f = f(t, x)$ are possibly *unbounded* functions taken in suitable Lebesgue spaces (depending on q) and the parameter q makes the r.h.s. in (2) grow with *superlinear* (and subnatural $q < p$) rates.

We split the analysis with respect to the cases $p \leq 2$ and $p \geq 2$. We approach to the first case through linearisation techniques, while we exploit a trick that uses the convexity of the lower order term in the second one.

The most important point to underline is that *our results hold in the same superlinear unbounded setting in which both existence and regularity/decay are dealt with* (see [M1] and [MP, M2]). The above results are contained in [LM].

-
- [LM] T. Leonori & M. Magliocca, <https://arxiv.org/abs/1711.06634> *Comparison results for a parabolic Cauchy-Dirichlet problem with superlinear gradient growth*, available on <https://arxiv.org/abs/1711.06634arXiv>.
- [M1] M. Magliocca, <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0362546X17302390> *Existence results for a Cauchy-Dirichlet parabolic problem with a repulsive gradient term*, *Nonlin. Anal.*, Vol. 166 (2018), pp. 102-143.
- [MP] M. Magliocca & A. Porretta, <https://arxiv.org/abs/1707.01761> *Local and global time decay for parabolic equations with super linear first order terms*, available on <https://arxiv.org/abs/1707.01761arXiv>.
- [M2] M. Magliocca, <https://arxiv.org/abs/1712.09246> *Regularizing effects and long time decays for quasilinear parabolic equations with p-Laplace operator*, available on <https://arxiv.org/abs/1712.09246arXiv>.

Davide Addona—Università Bicocca, Milano

Instabilità per un problema di combustione a due interfacce libere

In questo lavoro abbiamo studiato l'instabilità per la soluzione di un modello di combustione per un gas in una striscia con due interfacce libere, quella di combustione e quella di coda. Tramite un cambio di coordinate è possibile passare ad un problema a frontiere fissate, ma le equazioni che descrivono l'evoluzione della temperatura e della concentrazione del gas nella striscia diventano fully non-linear. Tramite tecniche analitiche abbiamo dimostrato l'esistenza di un'unica soluzione del problema non lineare e che, se il parametro fisico del sistema (detto numero di Lewis) è sufficientemente grande, allora la soluzione del problema è instabile per perturbazioni regolari e sufficientemente piccole. Inoltre, entrambe le frontiere risultano essere puntualmente instabili. Questo è un lavoro in collaborazione con Luca Lorenzi (Università degli studi di Parma, Italia), C.-M. Brauner (USTC, China) e W. Zhang (East China University of Technology, China).

Federica Gregorio—Università di Salerno

Bi-Laplacians on graphs and networks

We study the differential operator $A = \frac{d^4}{dx^4}$ acting on a finite connected network \mathcal{G} . We discuss self-adjointness issues, well-posedness of the associated parabolic problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Au,$$

and extrapolation of the generated semigroup to consistent families of semigroups on $L^p(\mathcal{G})$ for $1 \leq p \leq \infty$. Our most surprising finding is that, upon allowing the system enough time to reach diffusive regime, the parabolic equations driven by certain realizations of $-A$ display (sub-)Markovian features: analogous results seem to be unknown even in the classical case of domains.

Joint work with Delio Mugnolo.