UNIVERSITÀ DEL SALENTO

Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi"

Calcolo delle Variazioni ed Equazioni alle Derivate Parziali

in occasione del 70° compleanno di

Michele Carriero ed Eduardo Pascali

Lecce, 12 Ottobre 2018

Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi"

Aula "R. Anni"

Conferenzieri:

Lucio Boccardo, Università di Roma "La Sapienza"

Giuseppe Buttazzo, Università di Pisa

Gianni Dal Maso, SISSA, Trieste

Carlo Sbordone, Università di Napoli "Federico II"

Franco Tomarelli, Politecnico di Milano

Foto: D. Dell'Anna

Comitato Organizzatore:

Luca Anzilli, Antonio Leaci, Elisabetta Mangino, Diego Pallara

Segreteria Organizzativa:

Daniela Dell'Anna

Per motivi organizzativi si prega di registrarsi scrivendo a: cdv2018@unisalento.it

Calcolo delle Variazioni ed Equazioni alle Derivate Parziali

in occasione del 70° compleanno di Michele Carriero ed Eduardo Pascali

Lecce, 12 Ottobre 2018

Dipartimento di Matematica e Fisica “Ennio De Giorgi”

Aula “R. Anni”

Programma

9:30 Apertura dei lavori.

10:00 - 10:45 Carlo Sbordone: *Duality and distance formulas in Banach function spaces.*

10:50 - 11:10 Pausa caffè.

11:10 - 11:55 Lucio Boccardo: *Calcolo delle variazioni, Equazioni alle derivate parziali e G-convergenza in contesti non regolari.*

12:00 - 12:45 Gianni Dal Maso: *Equazione delle onde in domini dipendenti dal tempo e sua approssimazione (nello stile di De Giorgi) con problemi di minimo.*

13:00 - 15:00 Pausa pranzo.

15:00 - 15:45 Franco Tomarelli: *Un approccio variazionale alla segmentazione di immagini ed all'inpainting.*

15:50 - 16:35 Giuseppe Buttazzo: *One dimensional optimal reinforcements of elastic structures.*

16:40 Chiusura dei lavori.

20:30 Cena sociale.

Per motivi organizzativi, preghiamo tutti coloro che pensano di partecipare, per tutta o una parte della Giornata, di scrivere un messaggio di posta elettronica all'indirizzo cdv2018@unisalento.it

Informazioni per la cena sociale:
Le adesioni per la cena sociale possono essere comunicate inviando una email al medesimo indirizzo cdv2018@unisalento.it fino alla mattina del giorno mercoledì 10 ottobre.

Calcolo delle Variazioni ed Equazioni alle Derivate Parziali

in occasione del 70° compleanno di Michele Carriero ed Eduardo Pascali

Lecce, 12 Ottobre 2018

Sunti delle conferenze

Lucio Boccardo
Università di Roma "La Sapienza"
(boccardo@mat.uniroma1.it)

Calcolo delle variazioni, Equazioni alle derivate parziali e G-convergenza in contesti non regolari.

1 Anni 60-70

Negli ultimi mesi del 69, lavorando per la tesi di laurea, ho studiato la Mosco-convergenza (Umberto Mosco era il mio relatore di tesi), sia nel caso di convergenza di insiemi convessi, sia nel caso di successioni di funzionali I_n definiti in uno spazio di Banach V. La ricordo (in maniera discorsiva).

Definizione 1.1 *La successione $\{I_n(v)\}$ M-converge a $I_0(v)$ se*

1. *per ogni successione $\{v_n\}$ debolmente-convergente a v_0, risulta*

$$\liminf I_n(v) \geq I_0(v_0);$$

2. *per ogni $v_0 \in V$, esiste una successione $\{v_n\}$ fortemente-convergente a v_0 tale che*

$$\lim I_n(v) = I_0(v_0).$$

All'inizio degli anni 70, ci mettemmo a lavorare con Paolo Marcellini. Ci eravamo laureati lo stesso giorno del '70, con lo stesso relatore; poi lui era andato a Pisa e faceva il perfezionamento in Normale, sotto la direzione di Sergio Spagnolo. Nel collaborare con Paolo, ci accorgemmo che, con ipotesi ragionevoli, la definizione 1.1 era equivalente a

A la successione $\{u_n\}$ converge fortemente in V a u_0, u_i minimo di I_i;

B la successione delle soluzioni delle equazioni di Eulero convergono fortemente in V.

Proseguendo la ricerca, con Paolo provammo i seguenti risultati.

Teorema 1.2 *Se, in quanto scritto sopra, l'ipotesi <u>fortemente</u> viene sostituita con l'ipotesi <u>debolmente</u>, allora la conclusione vale con <u>fortemente</u> sostituita da <u>debolmente</u>.*

Non solo; ma anche che, nel caso di funzionali quadratici di tipo integrale, la nostra convergenza altro non era che quella introdotta da Sergio Spagnolo in lavori di pochissimo tempo prima: la G-convergenza. Poco dopo, la nostra cornice e i nostri risultati [BM-Ann.Mat.PuraAppl.] furono spazzati via dal ciclone $\Gamma-$convergenza di Ennio De Giorgi.

2 Anni 90

Un quarto di secolo dopo, in un lavoro dedicato alla memoria di Ennio De Giorgi, ho studiato una formulazione che tenta di recuperare il concetto di minimizzazione anche per funzionali integrali che hanno dati tanto singolari da non permettere al funzionale di essere ben definito.

Consideriamo funzionali integrali del tipo

$$J(v) = \int_\Omega j(x, Dv) - \int_\Omega f(x)\, v(x), \tag{1}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $N > 2$, $j(x, \xi)$ è una funzione reale definita in $\Omega \times \mathbb{R}^N$, tale che

$$\begin{cases} j(x,\xi) \text{ misurabile in } x \\ \text{e strettamente convessa in } \xi, \end{cases} \tag{2}$$

$$\alpha|\xi|^p \le j(x,\xi) \le \beta|\xi|^p,\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{3}$$

con $p > 1$.

Se il dato $f(x) \in L^m(\Omega)$, $1 \le m < (p^*)'$, il funzionale J non è neppure ben definito in $W_0^{1,p}(\Omega)$. È però possibile provare che

- esiste una funzione misurabile u tale che

$$\begin{cases} T_i(u) \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \forall\ i \in \mathbb{R}^+ : \\ \\ \displaystyle\int_{\{|u-\varphi|\le i\}} j(x, Du) - \int_\Omega f(x)\, T_i[u-\varphi] \le \int_{\{|u-\varphi|\le i\}} j(x, D\varphi), \\ \\ \forall\ \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad \forall\ i \in \mathbb{R}^+; \end{cases} \tag{4}$$

  e u è detta T-minimo;

- u è T-minimo se e solo se è la entropy-solution [Benilan-Boccardo-Gallouet ...] del problema al contorno

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x, \nabla u)) = f(x) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

  con $a(x,\xi) = j_\xi(x,\xi)$;
- se $m \geq (p^*)'$, la nozione di T-minimo coincide con l'usuale definizione di minimo.

3 Risultati di quest'anno

Consideriamo successioni di funzionali integrali del tipo

$$J_n(v) = \int_\Omega j_n(x, Dv) - \int_\Omega f(x)\, v(x), \tag{6}$$

con

$$\alpha|\xi|^p \leq j_n(x,\xi) \leq \beta|\xi|^p,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{7}$$

con $p > 1$. Risultati di compattezza rispetto alla Γ-convergenza sono dovuti a Ennio De Giorgi, Carlo Sbordone, Giuseppe Buttazzo, Gianni Dal Maso.

Se $f(x) \in L^m(\Omega)$, $m \geq (p^*)'$, e se su $J_n(v)$ supponiamo di avere la convergenza introdotta da Boccardo-Marcellini (quella che con linguaggio moderno si chiama $\Gamma(debole, debole)$) vale quanto detto nell'enunciato del Teorema 1.2: la successione dei minimi $\{u_n\}$ converge debolmente in $W_0^{1,p}(\Omega)$ a u_0, minimo di $J_0(v)$.

Se il dato $f(x) \in L^m(\Omega)$, $1 \leq m < (p^*)'$, dobbiamo far ricorso alla nozione di T-minimo ed ho provato (in un lavoro dedicato a Carlo Sbordone, in occasione del suo settantesimo compleanno) quanto segue.

Teorema 3.1 *Se la successione $\{I_n(v) = \int_\Omega j_n(x, Dv)\}$ converge a $I_0(v) = \int_\Omega j_0(x, Dv)$ secondo la seguente definizione*

1. *per ogni successione $\{v_n\}$ debolmente-convergente in $W_0^{1,p}(\Omega)$ a v_0, risulta*

$$\liminf I_n(v) \geq I_0(v_0);$$

2. *per ogni $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, esiste una successione $\{v_n\}$ debolmente-convergente a v_0 tale che*

$$\lim I_n(v) = I_0(v_0),$$

   Allora la successione $\{u_n\}$ dei T-minimi converge debolmente a u_0 in $W_0^{1,q}(\Omega)$, con $1 \leq q < \frac{(p-1)N}{N-1}$.

3.1 T-minimi parabolici

In un lavoro dedicato a Paolo Marcellini in occasione del suo settantesimo compleanno, ho esteso il risultato di esistenza provato nella sezione 2 al caso parabolico.

Giuseppe Buttazzo
University of Pisa
(giuseppe.buttazzo@unipi.it)

One dimensional optimal reinforcements of elastic structures

We study the optimal reinforcement of an elastic membrane, fixed at its boundary, by means of a connected one-dimensional structure. The problem consists in finding the optimal configuration for the stiffeners, the problem is then a shape optimization problem, where the admissible competing shapes are one-dimensional networks of prescribed length. We show the existence of an optimal solution that may present multiplicities, that is regions where the optimal structure overlaps. The case where the connectedness assumption is removed is also presented. Some numerical simulations are shown to confirm the overlapping phenomenon and to illustrate the complexity of the optimal structures when their total length becomes large.

Gianni Dal Maso
Scuola Internazionale di Studi Superiori Avanzati, Trieste
(dalmaso@sissa.it)

Equazione delle onde in domini dipendenti dal tempo e sua approssimazione (nello stile di De Giorgi) con problemi di minimo

Si dimostra l'esistenza di soluzioni deboli dell'equazione delle onde in una classe di domini dipendenti dal tempo. Usando una procedura suggerita da De Giorgi e sviluppata da Serra e Tilli, queste soluzioni sono approssimate da punti di minimo di opportuni funzionali definiti sullo spazio-tempo.

Carlo Sbordone
University of Naples Federico II
(sbordone@unina.it)

Duality and distance formulas in Banach function spaces.

We consider pairs of non reflexive Banach spaces (E_0, E) such that E_0 is defined in terms of a little-o condition and E is defined by the corresponding big-O condition.

Under suitable assumptions on the pair (E_0, E) there exists a reflexive and separable Banach space X (in which E is continuously embedded and dense) naturally associated to E which characterizes *quantitatively* weak compactness of bounded linear operators

$$T : E_0 \to Z$$

where Z is an arbitrary Banach space.

Pairs include (VMO, BMO), (B_0, B) where B is a recently introduced space by Ambrosio-Bourgain-Brezis- Figalli and Orlicz pairs (L^ψ_0, L^ψ) where L^ψ_0 is the closure of L^∞ in the Orlicz space L^ψ, Marcinkiewicz pairs $(L^{q,\infty}_0, L^{q,\infty})$ where $L^{q,\infty}_0$ is the closure of L^∞ in the Marcinkiewicz weak–L^q denoted by $L^{q,\infty}$.

More generally Banach function spaces are introduced.

The main results are *duality formulas* of the type

$$E_0^{\star\star} \simeq E \qquad \text{isometrically} \tag{1}$$

$$E^\star \simeq E_0^\star \oplus_1 E_0^\perp \tag{2}$$

and *distance formulas.*

These results are obtained in a joint paper with Luigi D'Onofrio and Roberta Schiattarella.

Franco Tomarelli
Politecnico di Milano
(franco.tomarelli@polimi.it)

Un approccio variazionale alla segmentazione di immagini ed all'inpainting.

Si presentano alcuni risultati per problemi del secondo ordine connessi a modelli variazionali per la segmentazione e l'inpainting di immagini.

Il modello di riferimento è il funzionale di Blake & Zisserman, di cui si illustra sinteticamente l'attuale stato dell'analisi a valle di una duratura collaborazione con gli amici matematici di Lecce, con particolare attenzione all'esistenza di soluzioni forti, alle condizioni di Eulero per le estremali ed alla loro approssimazione.