

Esame di ammissione al Dottorato di Ricerca in Matematica

Università di Lecce, 8 novembre 2004, prova A

Norme di svolgimento

Il candidato svolga una, ed una sola, tra le dissertazioni proposte, illustrando sinteticamente concetti ed esempi e dando la dimostrazione di almeno un teorema rilevante nell'ambito del tema proposto. Inoltre, il candidato risolva alcuni tra gli esercizi proposti in almeno due settori distinti.

Dissertazioni

1. Il teorema della funzione implicita (teorema del Dini) ed applicazioni.
2. Il principio di minima azione e le equazioni di Eulero-Lagrange.
3. La curvatura delle superficie.
4. Cambiamenti di base in algebra lineare.

Esercizi

SETTORE 1: ANALISI MATEMATICA.

1. Calcolare, per $\alpha \in]0, 1[$, l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x)} dx$$

2. Si risolva il problema di Cauchy

$$(2 + 2x \sin y) y' = \cos y, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}$$

SETTORE 2: ALGEBRA E GEOMETRIA.

1. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, e sia $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi compatti decrescente rispetto all'inclusione (ossia $K_n \supset K_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$). Dimostrare che $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ è un compatto non vuoto di X tale che, se U è un aperto in X , allora $U \supset K$ implica che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $K_n \subset U$.
2. Dimostrare che, se G è un gruppo, $Z(G)$ è il suo centro, e $G/Z(G)$ è ciclico, allora G è abeliano; dedurre che, se X è un gruppo ciclico privo di elementi di periodo 2, allora non esiste un gruppo G tale che $\text{Aut}(G) = X$.

SETTORE 3: MATEMATICA APPLICATA.

1. Siano X_1 e X_2 variabili aleatorie indipendenti ed con la stessa legge

$$P(X_j = 1) = P(X_j = -1) = \frac{1}{2}, \quad (j = 1, 2).$$

Se $X_3 := X_1 X_2$, le tre variabili aleatorie X_1 , X_2 e X_3

- sono a due a due indipendenti?
 - sono indipendenti?
2. Dopo aver scritto l'Hamiltoniana di un oscillatore armonico di dimensione 1, trovare con il metodo di Hamilton–Jacobi una trasformazione canonica che integri le equazioni del moto e scriverne la soluzione.