DOTTORATO DI RICERCA
IN MATEMATICA E INFORMATICA
UNIVERSITÀ DELLA BASILICATA E DEL SALENTO
XXXIII CICLO
PROVA SCRITTA

Si scelga tra la parte Matematica e quella Informatica. Tempo a disposizione 4 ore.

MATEMATICA

Il candidato svolga una tra le seguenti dissertazioni, illustrando sinteticamente i concetti e dimostrando almeno un risultato significativo.

1. Automorfismi interni di un gruppo.

2. Serie numeriche e serie di funzioni.

3. Teorie dell'integrazione.

4. Coniche e cubiche piane.

5. Prodotto scalare e prodotto hermitiano

6. Curve piane algebriche o differenziabili

7. Leggi dei grandi numeri

Il candidato risolva un massimo di quattro esercizî.

Analisi matematica e probabilità

Esercizio 1. Siano

(a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile,
(b) $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile e tale che $h(a) = h(b) = 1$ per qualche coppia $a, b \in \mathbf{R}$ tale che $a < b$,
(c) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che : $g(x) = f(x)\,h(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Provare che

(i) esiste $c \in \mathbf{R}$ tale che $f'(c) = g'(c)$,
(ii) l'equazione $f'(x)(\cos x - 1) = f(x)\sin x$ è soddisfatta per qualche $x_0 \in\ ]\,0, 2\pi[$.

Esercizio 2. Si discuta e si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |x| \int_{-2}^{y} \frac{\sin t}{t^2+1}\, dt\,, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 3. Si provi che per ogni $k \in\ ]0, 1[$ e $c \in \mathbf{R}$ la funzione costante di costante valore c è l'unica funzione continua in $[0, 1]$ che risolve l'equazione funzionale

$$f(x) = kf(kx) + c(1 - k).$$

Esercizio 4. In uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia (X_n) un processo di Bernoulli, vale a dire una successione di variabili aleatorie indipendenti, tutte con la stessa legge; ogni variabile X_n assume due valori con proabilità $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ e $\mathbb{P}(X_n = 0) = q := 1 - p$ con $p \in]0, 1[$; 1 indica un *successo*. Si calcoli la probabilità che il terzo successo avvenga a un tempo triplo di quello del primo successo.

Esercizio 5. In uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ siano Y una variabile aleatoria di legge beta di parametri p e q con $p, q \in \mathbf{Z}_+$ (interi positivi) e $p > 1$, e X una variabile binomiale di parametri $p + q - 1$ e $\theta \in]0, 1[$, $Y \sim B(p, q)$ e $X \sim Bi(p + q - 1, \theta)$. Si mostri che $\mathbb{P}(Y \leq \theta) = \mathbb{P}(X \geq p)$.

Algebra e geometria

Esercizio 6. Siano G un gruppo finito, k un intero positivo e $f : G \longrightarrow G,\ x \mapsto x^k$. Dimostrare che

$$f \text{è biiettiva} \quad \Longleftrightarrow \quad |G| \text{ e } k \text{ sono coprimi.}$$

Esercizio 7. Sia $C := \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ e sia J l'ideale di $C[x]$ generato da $g := x^3 + x^2 + 2x + 2$.

(1) Determinare due ideali massimali M_1, M_2 di $C[x]$ tali che $M_1 \cap M_2 = J$;
(2) Calcolare la cardinalità di $C[x]/M_1$ e di $C[x]/M_2$.

Esercizio 8. Studiare la curva piana di equazione

$$x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + 2x^2 = 0$$

determinandone i punti singolari, i punti d'inflessione, le tangenti in tali punti ed una rappresentazione parametrica razionale.

Esercizio 9. Determinare l'equazione delle quartiche piane irriducibili aventi tre cuspidi, mostrare che tutte le quartiche piane irriducibili con tre cuspidi sono proiettivamente equivalenti e che le tre tangenti cuspidali passano per uno stesso punto.

Esercizio 10. Dimostrare che tutti gli autovalori non nulli di una matrice antisimmetrica reale sono puramente immaginarî e le parti reale e immaginaria degli autovettori corrispondenti sono di uguale lunghezza e ortogonali.

Meccanica

Esercizio 11. Un tubo cilindrico omogeneodi lunghezza 2ℓ, massa totale M e di piccolo diametro può liberamente ruotare senza attrito attorno a un asse verticale z incidente ortogonalmente l'asse x del cilindro nel suo punto medio O. Entro il tubo può scorrere senza attrito un piccolo cilindro di massa $m = M/3$ e di diametro pari al diametro interno del tubo. All'istante t_0 la velocità angolare del tubo ha intensità pari a ω_0 e il cilindretto si trova a distanza $\ell/3$ dall'asse z con asse di moto nullo rispetto al riferimento solidale al tubo.

(a) Riconoscere che nel moto del sistema materiale in esame si conservano costanti il momento assiale totale delle quantità di moto rispetto all'asse z e l'energia cinetica totale. Riconoscere inoltre che il cilindretto prende a muoversi rispetto al riferimento solidale al tubo.

(b) Scrivere le due equazioni scalari che traducono i suddetti teoremi di conservazione, assimilando il tubo con un segamento rettilieneo e il cilindretto con un elemento materiale C e assumendo come parametri atti a individuare la configurazione del sistema l'ascissa x di C, contata positivamente a partire da O verso la posizione iniziale del cilindretto e l'angolo θ che l'asse x cosí orientato forma con una semiretta fissa uscente da O e giacente nel piano orizzontale nel quale si muove l'asse x e misurando l'angolo θ nel verso dell'atto di moto iniziale del tubo.

(c) Dedurre da queste due equazioni un'equazione differenziale autonoma nell'incognita $x(t)$ che individua il moto relativo di C e dimostrare che il moto di C è progressivo e accelerato.

(d) Calcolare i valori di $x'(t)$ e $\theta'(t)$ nell'istante t_1 nel quale C raggiunge l'estremità del tubo.

Analisi Numerica

Esercizio 12. Dato l'integrale

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\,,$$

si proponga un'opportuna formula di quadratura di Newton–Cotes stimando il numero di nodi sufficienti ad assicurare che il valore dell'integrale sia approssimato con 6 cifre decimali esatte.

Esercizio 13. Sia assegnato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dipendente dal parametro reale α, la cui matrice dei coefficienti è data da

$$A = \begin{bmatrix} 1+\alpha & -1/2 & -\alpha \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si studi per quali valori di α sono verificate le condizioni sufficienti di convergenza del metodo iterativo di Gauss–Seidel.

INFORMATICA

8. Il/la candidato/a scelga una delle seguenti tematiche:

(1) Basi di dati e sistemi informativi;
(2) Visualizzazione;
(c) Ingegneria del software;

e dopo averne data un'adeguata introduzione, illustri i concetti fondamentali e descriva uno o piú contributi, mettendo in evidenza gli aspetti salienti in merito allimpatto pratico e/o teorico che questi hanno avuto sullo sviluppo dellarea dellinformatica e della tematica scelta, in particolare.

Si risolvano un massimo di quattro tra gli esercizî proposti.

Esercizio 14. Parlare del tipo di dato astratto dizionario e fornire una sua implementazione (utilizzando pseudo-codice) mediante lista a puntatori (ad esempio left– e right–child).

Esercizio 15. Parlare del concetto di coesione ed accoppiamento nei sistemi software.

Esercizio 16. Parlare del testing di regressione.

Esercizio 17. Descrivere il concetto di design pattern e illustrare, inoltre, il Façade pattern descrivendone i vantaggi che derivano dal suo utilizzo.

Esercizo 18. Parlare del tipo di dato astratto dizionario e fornire una sua implementazione mediante lista a puntatori.