Prova di Ammissione
Dottorato di Ricerca in Matematica - XXIII ciclo

Università del Salento, 26 Novembre 2007

TEMA III

Il candidato svolga una ed una sola tra le dissertazioni proposte, illustrando sinteticamente concetti ed esempi e dando la dimostrazione di un risultato rilevante. Inoltre, il candidato risolva alcuni degli esercizi proposti.

DISSERTAZIONI

1. La struttura del gruppo delle permutazioni su un insieme finito ed i suoi sottogruppi.
2. Fattorizzazione di una matrice A di dimensione $n \geq 1$ non singolare nel prodotto $A = B \cdot C$, B e C non singolari. Cosa si sa dire se A è rettangolare $m \times n$?
3. Serie di potenze in campo reale e complesso.

ESERCIZI

1. Considerato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x+1}{y(x) - x^2}, & x \geq 0 \\ y(0) = a, \quad a > 0 \end{cases}$$

si provi che:
- $\exists |$y$=$ y$_a(x)$ soluzione del PdC in un intorno di $x = 0$ e se ne calcoli la derivata prima e seconda in $x_0 = 0$.
- $y_a(x)$ è definita su tutto $[0, +\infty)$ ed ha limite per $x \to +\infty$.

2. Considerato per ogni $n \in \mathbb{N}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{3^n (x + y(x))}{1 + (x^2 + y^2(x))4^n}, & x \geq 0 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

detta $y = y_n(x)$ una soluzione locale, si provi che:
- $\forall n \in \mathbb{N}$, y_n prolungabile su tutto $[0, +\infty)$;
- $\forall K$ compatto $K \subset [0, +\infty)$, risulta $(y_{n|K})_n$ converge uniformemente alla funzione $g(x) = 1 \ \forall x$.

3. Spiegare il prodotto alla Cauchy di due serie e provare che vale il seguente risultato:
se $\sum_n a_n x^n$ è assolutamente convergente, per $|x| < 1$, alla funzione $A(x)$, allora
$$\frac{A(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n,$$
dove $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.

4. Siano date la conica $\mathcal{C}$ $\begin{cases} yz - 1 = 0 \\ x = 0, \end{cases}$, la retta r $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = 0, \end{cases}$ e sia P il generico punto di $\mathcal{C}$.
Sia α il piano parallelo ad r e contenente la tangente a $\mathcal{C}$ in P, sia β il piano per P perpendicolare all'asse y:
- si determini la superficie rigata F descritta dalla retta $\alpha \cap \beta$ al variare di $P \in \mathcal{C}$;
- si studino i punti singolari di F;
- si verifichi se F è sviluppabile o sghemba;
- si trovino le direttrici rettilinee di F;
- si studi la curva intersezione di F con il piano $x = -1$.

5. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K, f e g endomorfismi di V tali che
$$f + g = i_V, \quad f \circ g = g \circ f = o.$$
Si verifichi che
- $f \circ f = f$, $g \circ g = g$
- $V = Imf \oplus Img$;
- f è diagonalizzabile se e solo se g è diagonalizzabile, supposto che V abbia dimensione finita.
Se f e g sono diagonalizzabili:
- si precisi la relazione che c'è tra gli autovalori di f e quelli di g;
- si mostri con esempi che f e g possono avere gli stessi autovalori e possono essere privi di autovalori comuni.

6. Sia data un'algebra di Boole $(L, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$:
- si verifichi che L è totalmente ordinato (rispetto alla relazione $x \leq y \iff x \vee y = y$) se so solo se $L = \{0,\ 1\}$;
- considerata una bigezione $f : L \to L$, si verifichi che f è un isomorfismo (f ed f^{-1} lasciano fissi $0, 1$ e commutano con $\vee, \wedge, \neg$) se solo se f conserva e riflette l'ordine ($x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$);
- ricordando che in L si assume la condizione di distributività, si verifichi che la complementazione $\neg$ è univocamente determinata dalle condizioni che la definiscono.

7. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- determinare la fattorizzazione $A = LU$, L triangolare inferiore speciale (con 1 sulla diagonale principale) ed U triangolare superiore;
- calcolare il determinane di A utilizzando la fattorizzazione;
- risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (0, -1, -3, -4)^T$.

8. Mostrare che la funzione

$$f(x) = log(1 + 2x) - 1,$$

si annulla una sola volta nell'intervallo $[0,\ 1]$. Individuare un'approssimazione iniziale del suo zero che garantisca la convergenza del metodo di Newton-Raphson e scrivere la prima iterata.

9. Interpolare la funzione

$$f(x) = tg(\frac{\pi}{4}x),$$

nei nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ mediante la formula di Lagrange e si dia una stima dell'errore in $x = \frac{1}{2}$.