TEMA I

Il candidato svolga una dissertazione, illustrando sinteticamente i concetti, i risultati e le applicazioni più rilevanti e risolva inoltre alcuni esercizi (possibilmente in più settori).

DISSERTAZIONI

1) La compattezza negli spazi metrici, con particolare riferimento agli spazi di funzioni continue.

2) Concetto di dimensione vettoriale e di dimensione topologica.

3) Stabilità dell'equilibrio per i sistemi olonomi.

ESERCIZI

1) Sia $f = x^3 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Determinare il grado del campo di spezzamento di f su $\mathbb{Q}$.

(b) Sia K l'estensione di $\mathbb{Q}$ ottenuta aggiungendo a $\mathbb{Q}$ una radice α di f. Esprimere l'inverso di $1 + \alpha$ in K come combinazione lineare di 1, α, α^2.

2) Si considerino i movimenti del piano.

(a) Trovare il gruppo dei movimenti di un rombo e stabilire se esso è isomorfo al gruppo dei movimenti di un rettangolo.

(b) Sia G il gruppo generato da due elementi σ e τ di periodo 2 e tale che n sia il più piccolo intero per cui $(\sigma\tau)^n = 1$. Provare che G è isomorfo al gruppo dei movimenti di un poligono regolare di n lati.

3) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $y_n(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \frac{n^2 \sin^2 y}{1 + n^2 \sin^2 y}, \quad y(0) = \pi/2.$$

(a) Provare che la successione di funzioni (y_n) converge uniformenente in $\mathbb{R}$ e calcolarne la funzione limite.

(b) Provare che la successione (y'_n) converge puntualmente in $\mathbb{R}$, calcolarne la funzione limite e descrivere gli insiemi in cui la convergenza è uniforme.

(c) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale delle serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y'_n(x)$ (individuando, per ognuna di esse, l'insieme di convergenza puntuale e i sottoinsiemi in cui la convergenza è uniforme o totale).

4) Siano v_1, v_2, v_3 tre vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$ e si ponga

$$S = \left\{x = \textstyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i; \quad \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1,2,3\right\},$$

$$\overline{S} = \left\{x = \textstyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i; \quad \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1,2,3\right\}.$$

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $T(\overline{S}) \subseteq S$. Provare che:

(a) $\forall x_1 \in \overline{S}$ esiste $\theta \in]0,1[$ tale che $T(\overline{S}) \subseteq x_1 + \theta\,(\overline{S} - x_1)$.

(b) Esiste una successione $(x_h)_h$ in $\overline{S}$ tale che

$$T^h(\overline{S}) \subseteq x_h + \theta^h\,(\overline{S} - x_1) \qquad \forall h \in \mathbb{N}.$$

(c) Esiste in $\overline{S}$ un unico punto $\tilde{x}$ tale che $T(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

(d) $\lim_{h\to\infty} T^h(x) = \tilde{x}, \quad \forall x \in \overline{S}$.

(e) Esiste $\overline{h} \in \mathbb{N}$ tale che T^h sia una contrazione in $\overline{S}$ per ogni $h \geq \overline{h}$ (mostrare, con un esempio, che T può non essere una contrazione in $\overline{S}$).

5) Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che $A^2 + I = 0$, dove I è la matrice unità.

(a) Provare che A è invertibile ed n è pari.

(b) Vedere se A è diagonalizzabile

(c) Calcolare $det A$ e $tr A$.

(d) Se $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ (e $A^2 + I = 0$), stabilire se A è diagonalizzabile.

6) Si consideri la curva $C : y^2 = x^3 - x$

(a) Studiare C accennando al grafico.

(b) C è irriducibile?

(c) Provare che gli eventuali punti doppi della cubica

$$\mathcal{N} : y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

possono essere solo al finito.

7) Il sistema in figura è costituito da una lamina omogenea di massa M e lato $3l$, vincolata a ruotare intorno all'asse verticale y mediante una cerniera cilindrica, e da un elemento materiale P, di massa m, che scorre lungo un suo spigolo. Oltre alla forza peso agiscono sull'elemento una forza $\mathbf{F} = -\nu \mathbf{v}_P$, sulla lamina un momento $\mathbf{M} = M_0\mathbf{j}$ ($\mathbf{j}$ versore della verticale ascendente) e la forza interna $\mathbf{F} = -k\mathbf{AP}$. ($\nu, k > 0$). I vincoli sono perfetti. Assunte le coordinate lagrangiane $\theta(t)$ e $\xi(t)$ come in figura,

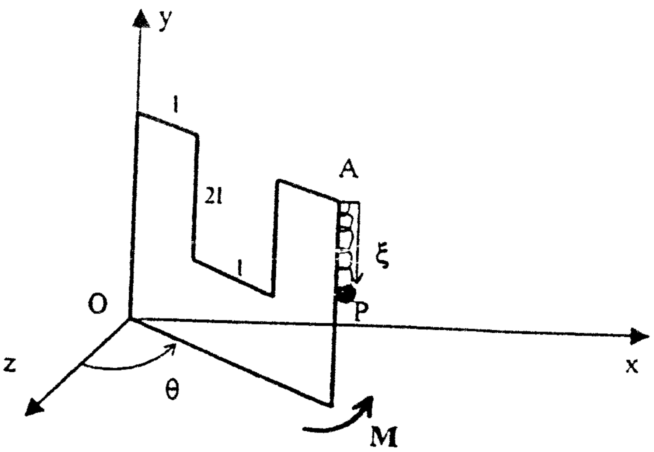
(a) determinare esplicitamente il moto del punto e della lamina

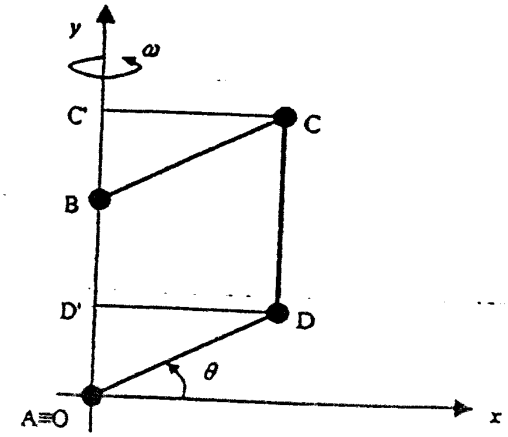
(b) individuare gli assi principale di inerzia della lamina relativi ad O.

8) Si consideri il quadrilatero articolato in figura costituito da aste omogenee uguali (massa m, lunghezza l). Il quadrilatero si muove nel piano verticale Oxy. Le aste sono collegate tra loro e vincolate all'asse y mediante cerniere cilindriche. In C e D agiscono forze elastiche di medesima costante elastica positiva k e centro C' e D' (rispettive proiezioni di C e D su y). I vincoli sono ideali e come parametro lagrangiano si assuma l'angolo $\theta(t)$ in figura. Il piano Oxy ruota attorno all'asse y con velocità angolare uniforme ω.

(a) Scrivere le equazioni di moto, determinare il valore di k per il quale $\theta = \pi/4$ è posizione di equilibrio e fare la discussione qualitativa del moto

(b) Calcolare il momento del vettore quantità di moto (assoluto) rispetto al polo O.


y
l
2l
l
A
ξ
P
O
z
θ
x
M


y
ω
C'
C
B
D'
D
θ
A≡O
x