Prova di ammissione al Dottorato di Ricerca in Matematica

XXVIII ciclo

Universitá del Salento, 9 Aprile 2013

TEMA I

Il candidato svolga una ed una sola delle dissertazioni proposte, illustrando sinteticamente concetti ed esempi, e dando la dimostrazione di almeno un teorema rilevante nell'ambito della dissertazione scelta. Inoltre, il candidato risolva alcuni degli esercizi proposti, possibilmente in settori distinti.

Dissertazioni

1) L'operatore forma di una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$.
2) Integrazione in senso improprio secondo Riemann per funzioni di una o più variabili.
3) Metodi iterativi per risolvere sistemi lineari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, A matrice $n \times n$. Si discutano le proprietà di convergenza e i criteri di stop.

Esercizi

Settore: Algebra e Geometria

1) Siano dati lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, la sfera unitaria

$$S^2 = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ||v||^2 = 1\}$$

e le superfici

$$\Sigma_1 : x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0, \quad \Sigma_2 : x^2 + y^2 - (z+1)^2 = 0.$$

Per ogni $v, w \in S^2$, si indichi con $(v \hat{,} w)$ l'angolo convesso individuato da v e w.
a) Data un'applicazione $f : S^2 \to S^2$, si verifichi che se

$$\big(f(v) \hat{,} f(w)\big) = (v \hat{,} w) \quad \forall\, v, w \in S^2 \,,$$

allora f é la restrizione a S^2 di una isometria F di $\mathbb{R}^3$.
b) Si determini il gruppo fondamentale dello spazio $X = \{p \in S^2 : p \notin \gamma_1 \cup \gamma_2\}$ munito della topologia indotta, dove $\gamma_1 = S^2 \cap \Sigma_1$ e $\gamma_2 = S^2 \cap \Sigma_2$.

2) Siano dati il sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$W = \big\{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_4 = 0\big\} \,,$$

e l'endomorfismo $f_k : W \to W$, definito per ogni $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W$ da

$$f_k(\vec{x}) = \big(-2x_1, 2x_1 + kx_2 + (k+3)x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4, -kx_2 - (k+3)x_3\big).$$

a) Dire per quali $k \in \mathbb{R}$, esiste una base di W costituita da autovettori per f_k.
b) Determinare, se esiste, un prodotto scalare definito positivo in $\mathbb{R}^4$ rispetto al quale $W = \vec{v}^{\,\perp}$ e $||\vec{u}||^2 = 3$, dove $\vec{v} = (1, 1, 1, 1)$ e $\vec{u} = (2, 0, 1, 1)$.

Settore: Analisi Matematica

3) Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n \log(1+4^n x^2)}{1+4^n x} \,, \qquad x \in [0,1] \,.$$

Si studi:

a) La convergenza semplice;
b) La continuità della funzione somma e la convergenza uniforme della serie;
c) L'integrabilità della funzione somma nell'intervallo $[0,1]$.

4) Si consideri la funzione

$$f(x) := \int_0^x \frac{\log(1+t)}{t} \, dt \,, \qquad x \in]-1,+\infty[\,.$$

Si studino le proprietà di regolarità di f (continuità, derivabilità) e il comportamento agli estremi di f e delle sue derivate.

Settore: Matematica Applicata

5) Dato l'integrale $\int_0^2 e^{-x^2} dx$ fornire l'approssimazione e la stima dell'errore con il metodo dei Trapezi. Determinare inoltre quanti sottointervalli del metodo dei Trapezi composti sono necessari per avere una approssimazione con almeno 4 cifre significative esatte.

6) Data la funzione

$$f(x) = x^2 \arctan(x) + x - 1, \quad x \in [0, \pi/4]$$

applicare il metodo di Newton-Raphson per approssimare uno zero e scrivere la prima iterata. Calcolato il residuo r_1 dopo la prima iterata, quante iterazioni del metodo delle bisezioni occorrono per avere una precisione sull'errore pari a $tol = \|r_1\|_\infty$?

TEMA II

Il candidato svolga una ed una sola delle dissertazioni proposte, illustrando sinteticamente concetti ed esempi, e dando la dimostrazione di almeno un teorema rilevante nell'ambito della dissertazione scelta. Inoltre, il candidato risolva alcuni degli esercizi proposti, possibilmente in settori distinti.

Dissertazioni

1) Orientazione di uno spazio vettoriale reale E_n e di una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$.
2) Convergenza delle serie di potenze e applicazioni all'integrazione termine a termine.
3) Metodi diretti per risolvere un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, A matrice $n \times n$.

Esercizi

Settore: Algebra e Geometria

1) Siano date le curve differenziabili

$\gamma(t) = (t + \sqrt{3}\sin t,\ 2\cos t,\ \sqrt{3}\,t - \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\quad \sigma_a(t) = (a\cos t, a\sin t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Determinare, se esiste, un $a_0 \in \mathbb{R}$ per cui le curve $\gamma(t)$ e $\sigma_{a_0}(t)$ risultino congruenti.
b) In caso di risposta positiva in a), si determini esplicitamente una isometria F di $\mathbb{R}^3$ tale che $F(\sigma_{a_0}(t)) = \gamma(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

2) Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \big(x_1 + kx_2 - kx_3 + x_4, 0, hx_2 - hx_3, x_1 + kx_2 - kx_3 + x_4\big).$$

al variare dei parametri $k, h \in \mathbb{R}$.
a) Dire per quali $k, h \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, esiste un prodotto scalare definito positivo g in $\mathbb{R}^4$ rispetto al quale il corrispondente endomorfismo f é simmetrico.
b) Nei casi in cui la risposta in a) é positiva, determinare $g(v, v)$ dove $v = (2, 1, 1, 0)$.

Settore: Analisi Matematica

3) Si studi l'esistenza globale e la positività delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin y - x \ , \\ y(0) = a > 0 \ . \end{cases}$$

4) Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \ , \qquad x \in [0, +\infty[\ .$$

Discutere:
a) La limitatezza di f;
b) L'integrabilità di f.

Settore: Matematica Applicata

5) Si fornisca l'approssimazione dell'integrale della funzione $f(x) = e^x \cos(x)$ per $x \in [0, \pi]$ mediante il metodo di Cavalieri-Simpson e si fornisca una stima dell'errore. Si calcoli il minimo numero N di intervalli necessari per avere un'approssimazione a meno di un errore di 10^{-3} mediante la formula di Simpson composta.

6) I seguenti valori sono relativi alle aspettative di vita (in anni) per i cittadini di una regione europea. Si costruisca il polinomio interpolante di Lagrange per stimare le aspettative di vita nel 1983 e nel 1988.

$$x_0 = 1980, \quad x_1 = 1985, \quad x_2 = 1990$$

$$y_0 = 74.2, \quad y_1 = 75.2, \quad y_2 = 76.4$$

Confrontare i risultati ottenuti con quelli che si avrebbero approssimando i dati con la retta dei minimi quadrati.

TEMA III

Il candidato svolga una ed una sola delle dissertazioni proposte, illustrando sinteticamente concetti ed esempi, e dando la dimostrazione di almeno un teorema rilevante nell'ambito della dissertazione scelta. Inoltre, il candidato risolva alcuni degli esercizi proposti, possibilmente in settori distinti.

Dissertazioni

1) Isometrie di uno spazio vettoriale reale euclideo E_n, esaminando in particolare quelle lineari.
2) Il teorema di punto fisso di Banach-Caccioppoli ed applicazioni alla risoluzione del problema di Cauchy del primo ordine.
3) Metodi numerici iterativi per approssimare uno zero di una funzione non lineare e continua $f(x)$. Si discutano le proprietá di convergenza e i criteri di stop.

Esercizi

Settore: Algebra e Geometria

1) Siano date nello spazio euclideo le superfici

$$M : x^2 + y^2 - 2z - 2 = 0 \quad \text{e} \quad \Sigma : x^2 + y^2 = (z + 1)^2.$$

a) Determinare le curvature principali e le direzioni principali della superficie M nel punto $p_0 = (1, 1, 0)$. Inoltre, esplicitare la seconda forma fondamentale nel punto p_0. La superficie M é orientabile? (giustificare la risposta).
b) Determinare il gruppo fondamentale dello spazio $X = \{p \in M : p \notin \gamma\}$ munito della topologia indotta, dove $\gamma = M \cap \Sigma$.

2) Sia dato l'endomorfismo f dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \big(x_1, x_2, (3/2)x_1 + x_3\big).$$

a) Determinare, se esiste, la decomposizione polare sinistra dell'endomorfismo f.
b) Dire, giustificando la risposta, se esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ che é trasformata da f in un'altra base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

Settore: Analisi Matematica

3) Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni:

$$f_n(x) := \int_1^n \frac{e^{-tx}}{t^n}\, dt\ , \qquad x > 0\ .$$

4) Si consideri l'operatore $T : C([0, 1]) \to C([0, 1])$ definito ponendo, per ogni $f \in C([0, 1])$ e per ogni $x \in [0, 1]$

$$T(f)(x) := \int_0^x t\, f(t)\, dt\ .$$

Si studino le seguenti proprietà di T:

a) Linearità;
b) Continuità;
c) Invertibilità;
d) Esistenza di autovalori.

Settore: Matematica Applicata

5) Si considerino i seguenti dati:

$$x_k = -\pi/2 + kh, \quad h = \pi/4,$$
$$f(x_k) = \cos(x_k) + \sin(x_k), \quad k = 0, \ldots, 4.$$

Si calcoli il polinomio di interpolazione, si fornisca una approssimazione di $f(\bar{x})$ per $\bar{x} = 1$ e si dia una stima dell'errore di Lagrange.

6) Utilizzando il metodo di Newton si costruisca un algoritmo per il calcolo della radice quadrata di un numero positivo a. Si proceda in modo analogo per il calcolo della radice cubica di a. Si discutano le proprietá di convergenza.
Nel primo caso, detto r_2 il residuo calcolato dopo la seconda iterata, quante iterate del metodo delle bisezioni servirebbero per avere una approssimazione con precisione $tol = \|r_2\|_\infty$ sull'errore?