Prova di ammissione al Dottorato di Ricerca in Matematica
XXX ciclo
Università del Salento, 22 settembre 2014

Tema A

Il candidato svolga una e una sola delle dissertazioni proposte, illustrando sinteticamente concetti ed esempi, e dando la dimostrazione di almeno un teorema rilevante nell'ambito della dissertazione scelta. Inoltre, il candidato risolva alcuni degli esercizi proposti.

Dissertazioni

1. Gruppi abeliani.
2. Numeri algebrici e numeri trascendenti.
3. Teoremi di esistenza e unicità locale e globale per il problema di Cauchy relativo alle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in forma normale.
4. Definizione e proprietà della nozione di compatezza.
5. Forme bilineari e sesquilineari.
6. Curve piane algebriche o differenziali (a scelta del candidato).
7. L'approssimazione normale per le leggi binomiale e di Poisson.
8. Il processo di Bernoulli, la legge geometrica, la sua speranza e il paradosso di Borel.
9. La teoria dell'interpolazione polinomiale e sue applicazioni a problemi del calcolo numerico.
10. I metodi per il calcolo di radici di equazioni non lineari.
11. Sistemi informativi per il web.
12. Evoluzione e manutenzione dei sistemi software.

Esercizi

1. Dimostrare che un gruppo con 15 elementi è ciclico.
2. Determinare il grado del campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ del polinomio $(x^2 - 2)(x^5 - 1)$.
3. Trovare le soluzioni $u(t, x)$ di classe C^1 del problema di Cauchy
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u = x, \\ u(0, x) = e^x. \end{cases}$$
4. Studiare la serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n + y^n + ny}$$
in $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$.

5. Studiare la curva piana di equazione $x^2(x-5)^2 + y^2(x^2 - 10x + 16) = 0$.

6. Dimostrare che ogni matrice può essere trasformata per coniugio nella sua trasposta.

7. Sia X uno spazio di Hausdorff e sia $C \subseteq X$ un suo sottospazio compatto. Dato $x \in X \setminus C$ provare che esiste un intorno U di x e un aperto V che contiene C per cui $U \cap V = \varnothing$.

8. Calcolare la curvatura della curva $\mathbb{R} \ni t \longmapsto (\cos^3 t, \sin^3 t) \in \mathbb{R}^2$ e mostrare che nei punti $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ la curvatura tende a $+\infty$.

9. Siano date nel medesimo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ due v.a. X e Y, indipendenti ed entrambe di legge geometrica, rispettivamente di parametro p_1 e p_2. Si determini la legge della v.a. $Z \doteq X \vee Y = \max\{X, Y\}$.

10. (Le scatole di fiammiferi di Banach) Un matematico distratto, Banach, teneva una scatola di fiammiferi in ciascuna delle due tasche della giacca e quando aveva bisogno di accendere la pipa sceglieva a caso la scatola da una delle due tasche. Se ciascuna delle due scatole inizialmente contiene N fiammiferi, si calcoli la probabilità
    (a) p_j che, quando Banach si *accorge* che una scatola è vuota, l'altra contenga j fiammiferi;
    (b) q_j che, quando una scatola *è* vuota, l'altra contenga j fiammiferi;
    (c) che la scatola che per prima è stata trovata vuota non sia stata la prima a svuotarsi.

11. Dire per quali valori di α, $\beta \in \mathbb{R}$ alla seguente matrice
$$M = \begin{pmatrix} 2 & \beta & 0 \\ \beta & 2 & 1 + i\alpha \\ 0 & 1 - i\alpha & 2 \end{pmatrix}$$
può essere applicato il metodo di Cholesky. Calcolare esplicitamente la fattorizzazione di Cholesky per tali valori.

12. Dato il vettore $V \in \mathbb{C}^n$ tale che $V^T = (1, -1, -1, 1)$, trovare una matrice elementare di Gauss P tale che $PV = \alpha E_1$, dove $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $E_1^T = (1, 0, 0, 0)$.

13. Descrivere il problema della distanza tra stringhe.

14. Descrivere la nozione di late binding nei linguaggi di programmazione orientati agli oggetti.

15. Parlare della raccolta dei requisiti e della modellazione funzionale.

Tema B

Il candidato svolga una e una sola delle dissertazioni proposte, illustrando sinteticamente concetti ed esempi, e dando la dimostrazione di almeno un teorema rilevante nell'ambito della dissertazione scelta. Inoltre, il candidato risolva alcuni degli esercizi proposti.

Dissertazioni

1. Gruppi di permutazioni.
2. Estensioni di campi.
3. Funzioni implicitamente definite e applicazioni.
4. Lunghezza di una curva.
5. Forme bilineari e sequilineari.
6. Curve piane algebriche o differenziali (a scelta del candidato).
7. L'approssimazione normale per le leggi binomiale e di Poisson.
8. Il processo di Bernoulli, la legge geometrica, la sua speranza e il paradosso di Borel.
9. La teoria dell'interpolazione polinomiale e sue applicazioni a problemi del calcolo numerico.
10. I metodi per il calcolo di radici di equazioni non lineari.
11. Ingegneria del software.
12. Linguaggi di programmazione.

Esercizi

1. Contare gli omomorfismi dal gruppo $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ nel gruppo $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}^*$ degli interi invertibili modulo 49.
2. Determinare il grado del campo di spezzamento di $(x^3-2)(x^4-3)$ su $\mathbb{Q}$ su $\mathbb{F}_3$ e su $\mathbb{F}_{11}$.
3. Provare che $f \equiv 1$ é l'unica funzione continua tale che
$$\int_0^a \int_0^b f(x,y)\,dx\,dy = ab \qquad \forall a \in \mathbb{R}\,, \forall b \in \mathbb{R}.$$
4. Sia (M,d) uno spazio metrico e sia $X \subseteq M$ numerabile e denso: $X = \{x_i | i \in \mathbb{N}\}$ e $\overline{X} = M$. Siano p e q due punti di M, provare che:
   a) se p e q sono distinti allora esiste $i \in \mathbb{N}$ per cui $d(p,x_i) \neq d(q,x_i)$.
   b) $d(p,q) = \inf_{i\in\mathbb{N}}(d(p,x_i) + d(x_i,q))$.
5. Studiare la curva piana di equazione $x^2(x^2-1) + (xy-1)^2 = 0$.

6. Dimostrare che qualunque matrice periodica A (cioè che soddisfi $A^n = I$ per un qualche n naturale) è diagonalizzabile.

7. Sia $X = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ con ∞ un elemento non in $\mathbb{R}^2$. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia dei sottoinsiemi U di X tali che: o U è aperto di $\mathbb{R}^2$ o U contiene ∞ e $X \setminus U$ è compatto in $\mathbb{R}^2$. Provare che $\mathcal{F}$ è una topologia su X per cui X è compatto.

8. Mostrare che le traslazioni e le trasformazioni lineari invertibili di $\mathbb{R}^3$ mandano superfici liscie in superfici liscie.

9. Siano date nel medesimo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ due v.a. X e Y, indipendenti ed entrambe di legge geometrica, rispettivamente di parametro p_1 e p_2. Si determini la legge della v.a. $Z \doteq X \vee Y = \max\{X, Y\}$.

10. (Le scatole di fiammiferi di Banach) Un matematico distratto, Banach, teneva una scatola di fiammiferi in ciascuna delle due tasche della giacca e quando aveva bisogno di accendere la pipa sceglieva a caso la scatola da una delle due tasche. Se ciascuna delle due scatole inizialmente contiene N fiammiferi, si calcoli la probabilità

    (a) p_j che, quando Banach si *accorge* che una scatola è vuota, l'altra contenga j fiammiferi;

    (b) q_j che, quando una scatola *è* vuota, l'altra contenga j fiammiferi;

    (c) che la scatola che per prima è stata trovata vuota non sia stata la prima a svuotarsi.

11. Dire per quali valori di α, $\beta \in \mathbb{R}$ alla seguente matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & \beta & 0 \\ \beta & 2 & 1 + i\alpha \\ 0 & 1 - i\alpha & 2 \end{pmatrix}$$

    può essere applicato il metodo di Cholesky. Calcolare esplicitamente la fattorizzazione di Cholesky per tali valori.

12. Dato il vettore $V \in \mathbb{C}^n$ tale che $V^T = (1, -1, -1, 1)$, trovare una matrice elementare di Gauss P tale che $PV = \alpha E_1$, dove $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $E_1^T = (1, 0, 0, 0)$.

13. Discutere dell'informtion hiding nella programmazione orientata agli oggetti.

14. Discutere di coesione ed accoppiamento

15. Descrivere le nozioni di classe, oggetto e riferimento nei linguaggi orientati agli oggetti.

TEMA C

Il candidato svolga una e una sola delle dissertazioni proposte, illustrando sinteticamente concetti ed esempi, e dando la dimostrazione di almeno un teorema rilevante nell'ambito della dissertazione scelta. Inoltre, il candidato risolva alcuni degli esercizi proposti.

Dissertazioni

1. Gruppi di permutazioni.
2. Anelli euclidei, a ideali principali e a fattorizzazione unica.
3. La teoria dell'integrazione secondo Lebesgue e teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.
4. Formulazioni in forma parametrica, cartesiana ed implicita delle superfici in $\mathbb{R}^3$.
5. Coniche e cubiche piane.
6. Curve piane algebriche o differenziali (a scelta del candidato).
7. L'approssimazione normale per le leggi binomiale e di Poisson.
8. Il processo di Bernoulli, la legge geometrica, la sua speranza e il paradosso di Borel.
9. La teoria dell'interpolazione polinomiale e sue applicazioni a problemi del calcolo numerico.
10. I metodi per il calcolo di radici di equazioni non lineari.
11. Sistemi informativi per il web.
12. Ingegneria del software.

Esercizi

1. Determinare il grado del campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ del polinomio $(x^2 - 2)(x^5 - 1)$.
2. Determinare i valori del parametro intero a per cui il seguente sistema di congruenze ha soluzione
$$\begin{cases} x^2 \equiv 5a \pmod{120} \\ 6x \equiv a \pmod{21} \end{cases}$$
3. Considerata la funzione $\sin(xy) : [0, \frac{\pi}{6}]^2 \to \mathbb{R}$, dimostrare che esiste una unica soluzione $u = u(x)$ in $C([0, \frac{\pi}{6}], \mathbb{R})$ per l'equazione integrale
$$\frac{\pi}{6} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(xy)u(x)\,dx = u(y).$$

4. Sia X lo spazio delle successioni reali, prese $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ in X definiamo
$$X \times X \ni (x, y) \overset{d}{\longmapsto} d(x, y) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{|y_k - x_k|}{1 + |y_k - x_k|}$$
Provare che d è una distanza su X non indotta da alcuna norma.

5. Studiare la curva piana di equazione $4(1 - y^2)(x^2 - y^2) - y^2(7 - 4y) = 0$.

6. Dimostrare che qualunque matrice può essere scritta come prodotto di due matrici simmetriche, una delle quali è non-singolare.

7. Sia $D^n \subset \mathbb{R}^n$ il disco chiuso unitario e sia $U \subset D^n$ un aperto contenente il bordo $\delta D^n = S^{n-1}$ di D^n. Provare che esiste un numero reale $r < 1$ tale che $D^n = B(0, r) \cup U$.

8. Sia $\mathcal{S}$ il semicono $\{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$ di $\mathbb{R}^3$, sia $\mathcal{H}$ il semipiano $\{(x, y) \,|\, y > 0\}$ e sia f l'applicazione $\mathcal{H} \ni (x, y) \longmapsto (y \cos x, y \sin x, y) \in \mathcal{S}$. Provare che f è un diffeomorfismo locale ma che non è un diffeomorfismo.

9. Siano date nel medesimo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ due v.a. X e Y, indipendenti ed entrambe di legge geometrica, rispettivamente di parametro p_1 e p_2. Si determini la legge della v.a. $Z \doteq X \vee Y = \max\{X, Y\}$.

10. (Le scatole di fiammiferi di Banach) Un matematico distratto, Banach, teneva una scatola di fiammiferi in ciascuna delle due tasche della giacca e quando aveva bisogno di accendere la pipa sceglieva a caso la scatola da una delle due tasche. Se ciascuna delle due scatole inizialmente contiene N fiammiferi, si calcoli la probabilità
    (a) p_j che, quando Banach si *accorge* che una scatola è vuota, l'altra contenga j fiammiferi;
    (b) q_j che, quando una scatola *è* vuota, l'altra contenga j fiammiferi;
    (c) che la scatola che per prima è stata trovata vuota non sia stata la prima a svuotarsi.

11. Dire per quali valori di α, $\beta \in \mathbb{R}$ alla seguente matrice
$$M = \begin{pmatrix} 2 & \beta & 0 \\ \beta & 2 & 1 + i\alpha \\ 0 & 1 - i\alpha & 2 \end{pmatrix}$$
può essere applicato il metodo di Cholesky. Calcolare esplicitamente la fattorizzazione di Cholesky per tali valori.

12. Dato il vettore $V \in \mathbb{C}^n$ tale che $V^T = (1, -1, -1, 1)$, trovare una matrice elementare di Gauss P tale che $PV = \alpha E_1$, dove $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $E_1^T = (1, 0, 0, 0)$.

13. Descrivere le principali modalitá di passaggio dei parametri con particolare riferimento al C++ e Java.

14. Descrivere il concetto di design pattern con particolare riferimento all'Adapter.

15. Descrivere gli Alberi Binari di Ricerca e le operazioni possibili su questi.