Esame di ammissione
al Dottorato di Ricerca in Matematica e Informatica

Università degli Studi della Basilicata & Università del Salento

9 settembre 2015, prova A

Norme di svolgimento

Il candidato svolga una, ed una sola, tra le dissertazioni proposte. Inoltre, il candidato risolva da due a quattro tra gli esercizi proposti.

Dissertazioni

1. Domini euclidei ed esempi significativi.
2. Le trasformazioni ortogonali in uno spazio vettoriale euclideo e la loro classificazione in dimensione due. Il candidato potrà accennare alla classificazione in dimensione tre.
3. Serie di funzioni.
4. Quantità conservate in meccanica Lagrangiana e Hamiltoniana.
5. Il candidato tratti il tema dell'approssimazione di funzioni mediante polinomi e/o funzioni polinomiali a tratti, e loro applicazioni.
6. Il candidato scelga una delle seguenti tematiche:
   (a) Reti di Calcolatori;
   (b) Algoritmica;
   (c) Visualizzazione e Rendering;

   e dopo averne data una adeguata introduzione, illustri i concetti fondamentali mettendo in evidenza gli aspetti più importanti.

Esercizi

1. Il candidato determini i gruppi abeliani di ordine 24, a meno di isomorfismi.
2. Determinare il prodotto scalare di $\mathbb{R}^2$ rispetto al quale i vettori $\vec{v}_1 = (1, 2)$ e $\vec{v}_2 = (3, 4)$ costituiscono una base ortonormale.
3. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = |x|^{-\alpha}$ è integrabile (secondo Lebesgue) sulla palla di $\mathbb{R}^3$ di centro l'origine e raggio 1.

   In generale, dire per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ e di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = |x|^{-\alpha}$ è integrabile (secondo Lebesgue) sulla palla di $\mathbb{R}^n$ di centro l'origine e raggio 1.
4. Data $f \in C([0, 1])$, sia y_n la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_n'(x) = ny_n(x) + e^{-n^2} f(x) \qquad x \in [0, 1] \\ y_n(0) = 0. \end{cases}$$

   Si studi la convergenza della successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ su $[0, 1]$.

5. Nel piano orizzontale (si ignori la forza peso), un'asta omogenea OA, di lunghezza l e massa m, è incernierata nel suo estremo O. Il punto materiale P, di massa m, scorre lungo l'asta ed è collegato al punto O da una molla ideale di costante elastica $k > 0$. Tutti i vincoli sono da considerarsi ideali. Si scelgano come coordinate libere l'angolo antiorario θ che l'asta OA forma con l'asse fisso $\mathbf{i}$ del piano e l'allungamento della molla s, riferendosi alla figura 1.

   (a) Scrivere l'energia cinetica e il momento delle quantità di moto rispetto al punto O del sistema e determinare almeno una costante del moto.

   (b) Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema.

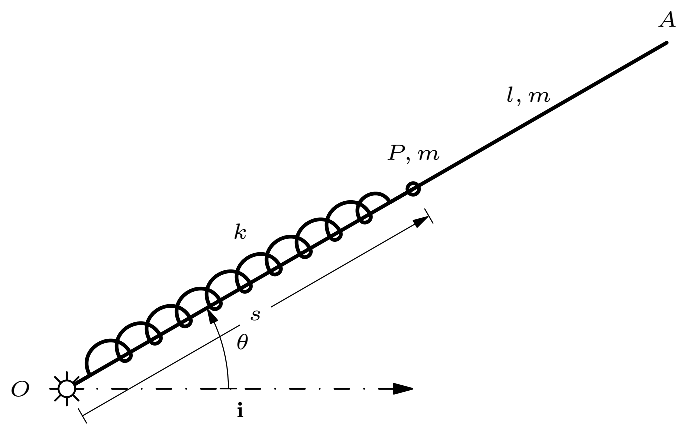

Figura 1:

6. Data la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta & -\beta \\ 1 & 1 & 1 \\ \beta & \beta & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

   determinare i valori del parametro β per i quali i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel risultino entrambi convergenti.

7. Introdurre il problema dell'ordinamento e gli algoritmi di ordinamento basati su confronti con complessità $O(n \log n)$.

8. Descrivere la struttura dati heap ed una sua possibile applicazione.

9. Descrivere la nozione di late binding nei linguaggi di programmazione orientati agli oggetti.

10. Descrivere il concetto di scheduler all'interno di un sistema operativo.

Esame di ammissione
al Dottorato di Ricerca in Matematica e Informatica

Università degli Studi della Basilicata & Università del Salento

9 settembre 2015, prova B

Norme di svolgimento

Il candidato svolga una, ed una sola, tra le dissertazioni proposte. Inoltre, il candidato risolva da due a quattro tra gli esercizi proposti.

Dissertazioni

1. I sottogruppi di Sylow nei gruppi finiti – principali risultati.
2. Applicazione aggiunta, endomorfismi simmetrici e teorema spettrale.
3. Derivabilità e differenziabilità per funzioni reali di più variabili reali.
4. Dinamica del corpo rigido ed equazioni cardinali.
5. Il candidato descriva e confronti metodi numerici per la risoluzione di sistemi lineari. Discutere costi, stabilità ed efficienza dei metodi considerati.
6. Il candidato scelga una delle seguenti tematiche:
   (a) Reti di Calcolatori;
   (b) Algoritmica;
   (c) Visualizzazione e Rendering;

   e dopo averne data una adeguata introduzione, illustri lo stato dell'arte in termini di avanzamento della conoscenza e di novità degli apporti più significativi.

Esercizi

1. Il candidato determini la struttura del gruppo degli elementi invertibili nelle classi di resto modulo 21.
2. Si considerino $\mathbb{R}^3$, munito del prodotto scalare standard, ed un suo endomorfismo f avente

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

   come matrice associata rispetto alla base canonica. Provare che $f \in O(\mathbb{R}^3)$ e fornirne il significato geometrico.
3. Sia $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$.
   (i) Provare che F è di classe C^1 e calcolarne la derivata.
   (ii) Dimostrare che F è soluzione di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine ed ottenere una descrizione esplicita di F.

4. Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ successioni di numeri reali tali che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge assolutamente. Si provi che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(b_n x)$ converge totalmente sugli intervalli limitati di $\mathbb{R}$ ad una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile. Si provi inoltre che $|f(x)| \leq |x| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infine si dimostri che la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$ se e solo se la serie $\sum a_n$ converge assolutamente.

5. Una lamina quadrata omogenea di lato ℓ e massa m, può ruotare in un piano verticale (con $\mathbf{j}$ diretto come la verticale ascendente, ed il peso diretto in senso opposto) intorno al suo spigolo O, mediante l'uso di una cerniera. Una molla ideale, di costante elastica $k = 2mg/\ell$, collega C, centro geometrico della lamina, al punto fisso $P \equiv (0, \ell)$. Si considerino tutti i vincoli ideali e si scelga come coordinata libera l'angolo antiorario θ che la verticale forma con la direzione OC (si veda la figura 1).

   (a) Determinare le configurazioni di equilibrio della lamina.

   (b) Scrivere l'equazione del moto e trovare almeno una quantità conservata.

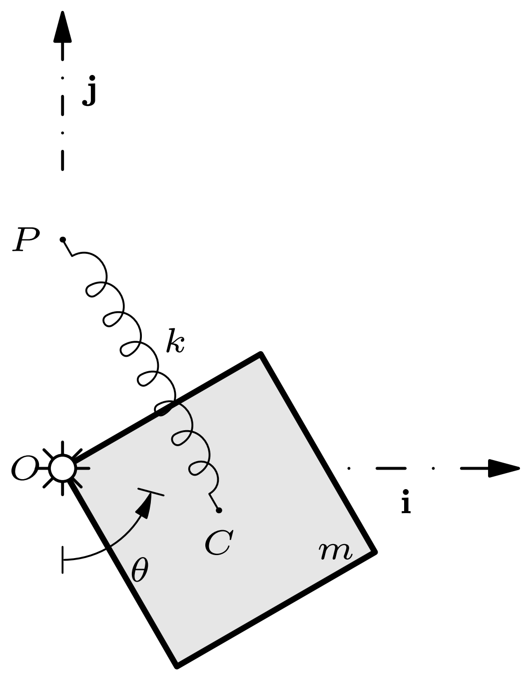

Figura 1:

6. Data la funzione $f(x) = \frac{|x|^{\frac{13}{2}} e^x}{1+x^2}$, $x \in [-1, 1]$ determinare il numero minimo n di nodi di Chebyshev di prima specie su cui costruire il polinomio interpolante di Lagrange, in modo che l'errore in norma uniforme risulti inferiore a $0.5e-8$ (impostare la disequazione in n).

7. Descrivere l'algoritmo Mergesort.

8. Discutere dell'information hiding nella programmazione orientata agli oggetti.

9. Descrivere le strutture dati stack, code e liste concatenate illustrando le operazioni possibili su ognuna.

10. Descrivere la struttura dati tabella hash e le operazioni possibili.

Esame di ammissione
al Dottorato di Ricerca in Matematica e Informatica

Università degli Studi della Basilicata & Università del Salento

9 settembre 2015, prova C

Norme di svolgimento

Il candidato svolga una, ed una sola, tra le dissertazioni proposte. Inoltre, il candidato risolva da due a quattro tra gli esercizi proposti.

Dissertazioni

1. Risultati elementari sui gruppi di permutazione.
2. Autovalori ed autovettori in uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$; criteri di semplicità per endomorfismi.
3. Forme differenziali.
4. Geometria delle masse: il baricentro, gli assi principali e l'ellissoide d'inerzia.
5. Il candidato illustri i principali metodi per il calcolo approssimato di zeri di funzione. Discutere costi, criteri di arresto e rapidità di convergenza dei metodi considerati.
6. Il candidato scelga una delle seguenti tematiche:
   (a) Reti di Calcolatori;
   (b) Algoritmica;
   (c) Visualizzazione e Rendering;

   e dopo averne data una adeguata introduzione, illustri quali sono i problemi aperti e gli sviluppi futuri.

Esercizi

1. Il piccolo teorema di Fermat. Il candidato enunci il teorema e ne dia almeno una dimostrazione.
2. Nel piano affine euclideo, fissato un riferimento ortonormale $\mathcal{R}(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione
   $$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$$
   Ridurre $\mathcal{C}$ in forma canonica e determinare la rototraslazione che realizza tale riduzione.
3. Si dica per quali valori di $\alpha > 0$ la funzione
   $$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \frac{\log(1+xy)}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   (i) è continua in (0,0),
   (ii) ammette derivate parziali in $(0,0)$,
   (iii) è differenziabile in (0,0). In questo caso, se ne calcoli il differenziale.

4. Data la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite da

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^2 e^{-\left(\frac{x}{n}\right)^2}, \qquad x \geq 0,$$

se ne studi la convergenza puntuale ed uniforme. Inoltre calcolare per ogni $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a f_n(t)dt \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt.$$

5. Nel sistema di figura 1, sito nel piano verticale e soggetto alla forza peso, un anello omogeneo, di raggio R e massa m, rotola senza strisciare su una guida orizzontale. L'asta AB, omogenea di lunghezza $l = \sqrt{2}R$ e massa m, è saldata con i due estremi sull'anello. Si scelga come coordinata libera l'angolo antiorario θ che la verticale forma con la congiungente tra il centro geometrico dell'anello C e quello dell'asta D.
   (a) Esprimere l'energia cinetica del sistema in funzione della coordinata libera.
   (b) Scrivere l'equazione del moto, supponendo che in A agisca una forza di intensità F ortogonale ad AB.

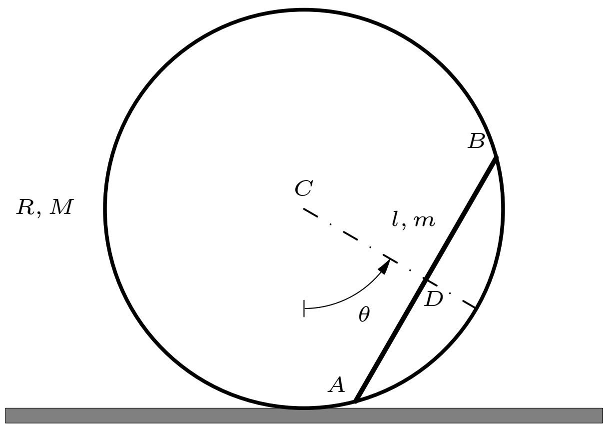

Figura 1:

6. Dato l'integrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{|x|^{\frac{13}{2}} e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

proporre una adeguata formula di quadratura Gaussiana, stimarne l'errore e stabilire il numero minimo n di nodi di quadratura necessari affinché l'errore risulti inferiore a $0.5e-9$ (impostare la disequazione in n).

7. Descrivere le nozioni di classe, oggetto e riferimento nei linguaggi orientati agli oggetti.

8. Descrivere la struttura dati alberi binari di ricerca e le operazioni possibili.

9. Discutere degli algoritmi di ordinamenti con complessità lineare.

10. Descrivere l'algoritmo Quicksort.