PROVA DI AMMISSIONE AL DOTTORATO DI RICERCA IN MATEMATICA – XXIV CICLO

UNIVERSITÁ DEL SALENTO, 22 GENNAIO 2009

Il candidato svolga una ed una sola tra le dissertazioni proposte, illustrando sinteticamente i concetti fondamentali e dando la dimostrazione di un risultato rilevante. Inoltre, il candidato risolva due degli esercizi proposti.

TEMA I

DISSERTAZIONI

(1) Enunciare teoremi di esistenza e unicitá locale e globale per il Problema di Cauchy per sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in forma normale, dimostrandone uno.
(2) Trattare le forme quadratiche reali e le loro rappresentazioni canoniche.
(3) Leggi dei grandi numeri.

ESERCIZI

(1) Studiare il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (y(x))^2 - \dfrac{|x|}{1+x^2} \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

precisando se valgono teoremi di esistenza e unicitá locale o globale. Determinare l'intervallo massimale su cui é definita la soluzione e mostrarne l'andamento qualitativo anche con un grafico.
(2) Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\, dx$$

mediante l'uso della derivata della funzione definita per $\alpha \in [0,1]$ da

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\, dx\,.$$

(3) Dato uno spazio vettoriale V di dimensione finita n, sia f un endomorfismo di V tale che $f^2 = 0$. Detto r il rango di f , si dimostri che $r \leq \frac{n}{2}$.

(4) Determinare l'ordine e la struttura del gruppo degli elementi invertibili nell'anello $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ delle classi di resto $\mod 24$ ($\mathbb{Z}$ anello degli interi)

(5) Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sono date due variabili aleatorie, X con legge di Poisson di parametro 1, $X \sim \mathcal{P}(1)$, e Y con legge di Bernoulli di parametro $1/2$; X e Y sono indipendenti.
  (a) Si trovi la legge della variabile aleatoria $S = X + Y$;
  (b) si calcoli la probabilità $\mathbb{P}(X = \varphi \circ S)$ ove $\varphi : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ è l'applicazione che ad ogni $n \in \mathbb{Z}_+$ associa l'intero positivo k che rende massima la probabilità condizionata
$$\mathbb{P}(X = k \mid S = n).$$

(6) Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sono date due variabili aleatorie indipendenti, X e Y, entrambe con legge geometrica di parametro $p \in]0, 1[$. Si definiscano due nuove variabili aleatorie
$$S := \min\{X, Y\} \qquad \text{e} \qquad T := |X - Y|.$$
  (a) Si trovi la legge congiunta del vettore (S, T), si calcoli, cioè, per ogni $j \in \mathbb{N}$ e per ogni $k \in \mathbb{Z}_+$, la probabilità $\mathbb{P}(S = j, T = k)$;
  (b) si trovino le leggi marginali di S e di T e si dica se le variabili aleatorie S e T siano o no indipendenti.