TRACCIA I

Il candidato tratti brevemente uno ed uno solo dei temi proposti e risolva alcuni degli esercizi assegnati.

TEMI

1) Serie di potenze: enunciare le principali proprieta' e dimostrare un risultato significativo.

2) Il processo di Bernoulli: enunciare le principali proprieta' e dimostrare un risultato significativo.

3) Equilibrio e stabilita' nei sistemi dinamici: enunciare le principali proprieta' e dimostrare un risultato significativo.

4) Connessione negli spazi topologici: enunciare le principali proprieta' e dimostrare un risultato significativo.

Esercizi

1) Sia data l'equazione differenziale

$$y' = y^2 \sin y.$$

i) Provare che tutte le soluzioni sono definite e limitate in $\mathbf{R}$;
ii) Provare che tutte le soluzioni sono monotone
iii) Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} y(x)$$

per la soluzione verificante $y(0) = 1$

2) Sia

$$a_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx.$$

i) Provare che $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$;
ii) provare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

.

3) Sia (a_n) la successione definita per ricorrenza da

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^\alpha} \qquad a_1 = 0$$

dove $\alpha > 0$.

i) Provare che la successione ammette limite ℓ;
ii) Dire per quali valori di α risulta $\ell < +\infty$
iii) Calcolare ℓ per $\alpha = 2$

4) Dato uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$, di dimensione finita n, provare che se $\{e_1, .., e_n\}$ è una base di V e $\lambda_1, ...\lambda_{n-1}$ sono scalari fissati in $\mathbb{K}$, allora $\{e_1, \lambda_1 e_1 - e_2, \lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 + e_3, .., \lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 ... - (-1)^n e_n\}$ è ancora una base di V.

5) Dato uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ e due sottospazi vettoriali U e W, si consideri l'applicazione lineare $f : U \times W \to V$, definita da $f(u, w) = w - u$. Descrivere $\mathrm{Ker} f$ e $\mathrm{Im} f$.

6) Sia (V_n, g) uno spazio euclideo, di dimensione finita n. Provare che per ogni $\theta \in V_n^*$ (lo spazio duale di V) esiste un unico $x \in V_n$, tale che $\theta(v) = g(x, v)$ per ogni $v \in V_n$. (SUGGERIMENTO: l'unico sottospazio di V^*, di dimensione maggiore o uguale a n, è V^* stesso.)

7) In un piano verticale Oxy si consideri un pendolo semplice di massa m e lunghezza l , il cui punto di sospensione Q si muove lungo l'asse y secondo una legge oraria assegnata $y_Q = f(t)$.
Si scrivano le equazioni del moto.

8) In un piano verticale Oxy sono dati due punti materiali P e Q di massa unitaria, il primo vincolato a muoversi sulla circonferenza unitaria centrata in $(0, 2)$, il secondo lungo l'asse x, soggetti alla gravita' e connessi da una molla di costante elastica k. I vincoli sono lisci.
Determinare:

i) le equazioni del moto del sistema;
ii) le configurazioni di equilibrio e la loro stabilita';
iii) (FACOLTATIVO) le frequenze dei modi normali di oscillazione attorno ad una configurazione di equilibrio stabile.

9) Sia $n \in \mathbb{N} \setminus 1$ e sia J_n l'ideale di $\mathbb{Z}[x]$ generato da x ed n. Si dimostri che

i) J_n non e' un ideale principale di $\mathbb{Z}[x]$,
ii) $\mathbb{Z}[x]/J_n$ e' isomorfo a $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$.
ii) Si caratterizzino (al variare di n) gli ideali J_n che sono massimali in $\mathbb{Z}[x]$.

10) Siano $X_1, ..X_n$ variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite, con legge esponenziale di parametro $\lambda > 0$.

i) si scriva la legge di probabilita' in questione;
ii) si calcolino speranza e varianza di tale legge;
iii) si calcoli la funzione di ripartizione della variabile aleatoria $Y = min\{X_1 .., X_n\}$, e si riconosca esplicitamente la legge ricavata.