# Prova di ammissione
# Dottorato di Ricerca in Matematica - XXII ciclo

Università del Salento, 19 febbraio 2007

## TEMA I

Il candidato svolga una ed una sola tra le dissertazioni proposte, illustrando sinteticamente concetti ed esempi e dando la dimostrazione di un risultato rilevante. Inoltre il candidato risolva alcuni esercizi.

### Dissertazioni

1. Diagonalizzazione di matrici quadrate.
2. Quantità conservate per moti in un potenziale centrale.
3. Massimi e minimi liberi in più variabili.
4. Riferimenti e formule di Frènet per una curva regolare in $\mathbb{R}^3$.

### Esercizi

1. Sia $f_k$ l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 2 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

dove $k \in \mathbb{R}$.
Determinare i valori di $k$ per cui $f_k$ è diagonalizzabile. Per tali valori determinare una base costituita da autovettori di $f_k$.

2. Data la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - x_n^2 \\ x(0) = 1/2 \end{cases},$$

provare che $x_n$ tende a zero decrescendo e calcolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2.$$

3. Sia $y$ la soluzione del problema di Cauchy per $t \geq 0$

$$\begin{cases} y' = t + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Provare che la soluzione esplode ad un tempo $t_c > 0$, stimando $t_c$ dall'alto e dal basso.

4. Sia $A$ una matrice $n \times n$ avente $n$ autovalori reali e distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Calcolare gli autovalori della matrice $A^3 + A^2 + 2A + I$.

5. Un oscillatore armonico forzato è retto dalla seguente equazione

$$\ddot{x} + \omega^2 x = A \sin(\Omega t).$$

Determinare l'energia meccanica totale dell'oscillatore. Discutere il caso $|\omega| = |\Omega|$.

6. Una famiglia di sistemi dinamici lineari autonomi è definita dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= -x \end{cases}$$

dove $a$, $b$ sono numeri reali uniformemente distribuiti nell'intervallo $(-1, 1)$. Determinare quale è la probabilità $P(St)$, dove $St$ è la sottofamiglia dei sistemi dinamici asintoticamente stabili (ovvero le cui soluzioni tendono tutte a zero per $t \to +\infty$).

7. Sia $p$ un numero primo, $p \neq 2$, $E$ un'estensione del campo $\mathbb{F}_p$ di $p$ elementi e $b \in E$ tale che $b^4 + 1 = 0$.
(1) Mostrare che l'ordine moltiplicativo di $b$ è uguale a 8.
(2) Far vedere che l'elemento $b + b^{-1}$ ha il quadrato uguale a 2.
(3) Dopo aver motivato l'uguaglianza $(b + b^{-1})^p = b^p + (b^{-1})^p$, dimostrare che se $p$ è congruo a 1 modulo 8, allora $b + b^{-1} \in \mathbb{F}_p$.