Esame di ammissione
al Dottorato di Ricerca in Matematica

Università di Lecce, 28 ottobre 2010, prova A

Norme di svolgimento

Il candidato svolga una, ed una sola, tra le dissertazioni proposte, illustrando sinteticamente concetti ed esempi e dando la dimostrazione di almeno un teorema rilevante nell'ambito del tema proposto. Inoltre, il candidato risolva almeno tre tra gli esercizi proposti, in almeno due settori distinti.

Dissertazioni

1. Campo di spezzamento di un polinomio.
2. Endomorfismi semplici ed endomorfismi simmetrici.
3. Invertibilità e funzioni implicite: aspetti locali e globali.
4. Il teorema di Noether.
5. Decomposizioni di matrici per la soluzione numerica di sistemi di equazioni lineari.

Esercizi

Settore 1: algebra.

1. Sia $\mathbb{Z}$ il gruppo ciclico degli interi con l'usuale addizione. Si indicano con $A = \langle m \rangle$ e $B = \langle n \rangle$ i due sottogruppi di $\mathbb{Z}$ generati respettivamente da m, $n \in \mathbb{Z}$. Dimostrare le seguenti affermazioni:
   (a) Ogni sottogruppo di $\mathbb{Z}$ è ciclico.
   (b) $A + B = \big\langle (m, n) \big\rangle$ dove (m, n) è il massimo comune divisore di m e n.
   (c) $A \cap B = \big\langle [m, n] \big\rangle$ dove $[m, n]$ è il minimo comune multiplo di m e n.
2. Siano G un gruppo finito G e H un sottogruppo proprio di G.
   (a) Il numero dei sottogruppi di G coniugati ad H è uguale all'indice del normalizzante N di H in G.
   (b) G non può essere l'unione insiemistica dei sottogruppi di G coniugati ad H.

Settore 2: geometria.

1. Siano V, W, Z tre spazi vettoriali sul campo reale o complesso, di dimensione finita, e sia

$$\{0\} \to V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z \to \{0\}$$

   una successione di funzioni lineari tali che il nucleo di ognuna sia uguale all'immagine della precedente.

   - Dimostrare che assegnare uno dei seguenti dati equivale ad assegnare gli altri due:
     (a) un sottospazio $Z' \subset W$ tale che $W = \operatorname{Im} f \oplus Z'$;
     (b) una funzione lineare $f' \colon W \to V$ tale che $f' \circ f = \mathrm{Id}_V$;

(c) una funzione lineare $g' \colon Z \to W$ tale che $g \circ g' = \mathrm{Id}_Z$.

- Dimostrare mediante un controesempio che le affermazioni precedenti possono essere false, più in generale, per i gruppi abeliani.

2. Sia data la superficie

$$\mathcal{S} \colon \begin{cases} x = (\alpha + r\cos\varphi)\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = (\alpha + r\cos\varphi)\cos\theta, \end{cases} \qquad \alpha > r > 0.$$

- Riconoscere $\mathcal{S}$, trovarne la curvatura gaussiana e la curvatura media.
- Scrivere l'equazione delle geodetiche di $\mathcal{S}$. Si descriva esplicitamente una famiglia di geodetiche di $\mathcal{S}$ individuate da una proprietà notevole di $\mathcal{S}$.

Settore 3: analisi matematica.

1. Si studi il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \log y - x \\ y(1) = e \end{cases}$$

e si tracci un grafico qualitativo della soluzione.

2. Sia

$$F(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt)\, dt.$$

(a) Si provi che F è di classe $\mathcal{C}^\infty$ e che la derivata si ottiene derivando sotto il segno d'integrale.

(b) Si dimostri che F soddisfa la seguente equazione differenziale:

$$F'(x) + 2x\,F(x) = 0, \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R})$$

e si trovi la soluzione esplicita.

(c) Dai risultati precedenti si ricavi l'integrale di Laplace

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} \cos(bt)\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-b^2/4a}, \quad (a > 0, \quad b \in \mathbb{R}).$$

Settore 4: matematica applicata.

1. Si descriva e si applichi il metodo delle tangenti (Newton) per la ricerca di uno zero della seguente funzione, discutendo le proprietà di convergenza:

$$f(x) = e^{2x} - x + 1, \quad x \in [0, 2]$$

Si calcoli la seconda iterata x_2 ed il suo residuo r_2 . Per avere un'approssimazione con tolleranza $\texttt{tol} = r_2$, quante iterate impiegherebbe il metodo di bisezione?

2. In un piano orizzontale Oxy un'asta OA di lunghezza $2l$ e massa m è vincolata a ruotare attorno all'estremo O. Lungo l'asta scorre un punto materiale di massa M, attratto dal punto O con una forza elastica di costante k. I vincoli sono lisci.

- Scrivere la lagrangiana del sistema ed individuare le costanti del moto.
- Scrivere la lagrangiana ridotta e disegnarne il grafico nello spazio delle velocità.
- Trovare le configurazioni di equilibrio per la lagrangiana ridotta e discuterle come moti del sistema originale.

Esame di ammissione
al Dottorato di Ricerca in Matematica

Università di Lecce, 28 ottobre 2010, prova B

Norme di svolgimento

Il candidato svolga una, ed una sola, tra le dissertazioni proposte, illustrando sinteticamente concetti ed esempi e dando la dimostrazione di almeno un teorema rilevante nell'ambito del tema proposto. Inoltre, il candidato risolva alcuni tra gli esercizi proposti in almeno due settori distinti.

Dissertazioni

1. Tre teoremi d'omomorfismo per i gruppi ed applicazioni.
2. La curvatura delle superfici nello spazio euclideo.
3. Funzioni monotone.
4. Il principio di minima azione.
5. Metodi di soluzione numerica di equazioni non lineari.

Esercizi

Settore 1: algebra.

1. Per un numero naturale m, sia $\Phi(m)$ l'insieme degli interi da 1 a m, primi relativi a m.
   (a) Dimostrare che $\Phi(m)$ è un gruppo sotto moltiplicazione modulare rispetto a m.
   (b) *(Teorema di Eulero)* Per ogni intero k con $\gcd(k,m) = 1$, dimostrare la congruenza $k^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ dove $\phi(m)$ è la funzione di Eulero.
   (c) Per $n > 1$ un altro numero naturale, dimostrare che m divide $\phi(n^m - 1)$.
2. Sia D un anello commutativo finito. Dimostrare che D è un dominio d'integrità se e solo se D è un campo.

Settore 2: geometria.

1. Siano h, g due forme bilineari simmetriche su uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ di dimensione finita. Sia g definita positiva.
   - Dimostrare che esiste un'unico endomorfismo $f\colon V \to V$ tale che
   $$\forall v, w \in V \qquad g(f(v), w) = h(v, w).$$
   - Dedurre che esiste una base $\mathcal{B}$ di V ortonormale rispetto a g ed ortogonale rispetto ad h. Qual è la relazione tra la segnatura di h e gli autovalori di f?
2. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la curva
   $$c\colon \mathbb{R} \ni s \mapsto (2\sqrt{2}s - \sin s, 2\sqrt{2}\sin s + s, 3\cos s) \in \mathbb{R}^3$$
   e se ne determinino la curvatura e la torsione. Si dica se esiste un'elica della forma
   $$h(s) = (a\cos s, a\sin s, bs)$$
   a cui c sia isometrica, ed in caso affermativo si determini un'isometria $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che mandi c in h.

Settore 3: analisi matematica.

1. Si studi il problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = \log y - x \\ y(1) = e \end{cases}$$
e si tracci un grafico qualitativo della soluzione.

2. Si consideri la successione di funzioni
$$f_n(x) = \int_1^n \frac{e^{-xy}}{1+y^2}\,dy, \qquad (n \geq 1).$$
   (a) Provare che ogni f_n è continua su $\mathbb{R}$.
   (b) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni.

Settore 4: matematica applicata.

1. Dato il sistema lineare
$$\begin{pmatrix} k & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il metodo di Jacobi converge (condizione necessaria e sufficiente). Fissato un valore di k dare una stima dell'errore relativo usando il residuo dopo tre iterazioni.

2. In un piano orizzontale Oxy un'asta OA di lunghezza $2l$ e massa m è vincolata a ruotare attorno all'estremo O. Lungo l'asta scorre un punto materiale di massa M, attratto dal punto O con una forza elastica di costante k. I vincoli sono lisci.
   - Scrivere la lagrangiana del sistema ed individuare le costanti del moto.
   - Scrivere la lagrangiana ridotta e disegnarne il grafico nello spazio delle velocità.
   - Trovare le configurazioni di equilibrio per la lagrangiana ridotta e discuterle come moti del sistema originale.

Esame di ammissione al Dottorato di Ricerca in Matematica

Università di Lecce, 28 dicembre 2010, prova C

Norme di svolgimento

Il candidato svolga una, ed una sola, tra le dissertazioni proposte, illustrando sinteticamente concetti ed esempi e dando la dimostrazione di almeno un teorema rilevante nell'ambito del tema proposto. Inoltre, il candidato risolva alcuni tra gli esercizi proposti in almeno due settori distinti.

Dissertazioni

1. Polinomio minimo di un elemento algebrico e sue proprietà.
2. Spazi compatti ed il caso particolare degli spazi metrici.
3. Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale.
4. Dinamica del corpo rigido.
5. Metodi iterativi per la soluzione di sistemi di equazioni lineari.

Esercizi

Settore 1: algebra.

1. Se G è un gruppo abeliano finito con $G = \{g_k\}_{k=1}^n$, dimostrare che $\prod_{k=1}^n g_k$ è un elemento di G il cui quadrato è l'elemento neutro.
   (a) Se il gruppo G non ha elementi di ordine 2, dimostrare che $\prod_{k=1}^n g_k = e$ *(l'elemento neutro)*.
   (b) Se il gruppo G ha un solo elemento x di ordine 2, dimostrare che $\prod_{k=1}^n g_k = x$.
   (c) *(Teorema di Wilson)* Per un numero primo p, dimostrare che $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
2. Per un gruppo abeliano finito G, sia H l'insieme delle soluzioni $x^n = e$ in G:
   (a) Dimostrare che H è un sottogruppo con la stessa operazione di G.
   (b) Se $n \mid |G|$, allora $|H|$ è un multiplo di n.

Settore 2: geometria.

1. Sia V lo spazio vettoriale delle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri complessi e sia $S\colon V \to V$ l'operatore di traslazione, definito da

$$S((a_1, a_2, a_3, \ldots)) = (a_2, a_3, a_4, \ldots).$$

   (a) Trovare gli autovettori di S.
   (b) Mostrare che il sottospazio W delle successioni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ è un sottospazio 2-dimensionale S-invariante di V e si esibisca una base per W.
   (c) Trovare una formula esplicita per l'n-esimo numero di Fibonacci, dove $f_2 = f_1 = 1$ e $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

2. Sia $A = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$; si consideri l'applicazione differenziabile

$$\mathbf{x}\colon A \ni (u, \theta) \mapsto (3u^2 \cos\theta, 3u^2 \sin\theta, e^{-u}) \in \mathbb{R}^3.$$

- Si provi che $S = \mathbf{x}(A)$ è una superficie orientabile e si dica se è il grafico di una funzione differenziabile definita su un opportuno aperto di uno dei tre piani coordinati.
- Si calcolino la prima e la seconda forma fondamentale di S.
- Si calcolino le curvature principali di S e si discuta il segno della curvatura gaussiana di S. Si dica, inoltre, se S ha punti ombelicali.

Settore 3: analisi matematica.

1. Si studi il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \log y - x \\ y(1) = e \end{cases}$$

e si tracci un grafico qualitativo della soluzione.

2. Sia

$$F(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt)\, dt.$$

(a) Si provi che F è di classe $\mathcal{C}^\infty$ e che la derivata si ottiene derivando sotto il segno d'integrale.

(b) Si dimostri che F soddisfa la seguente equazione differenziale:

$$F'(x) + 2x\,F(x) = 0, \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R})$$

e si trovi la soluzione esplicita.

(c) Dai risultati precedenti si ricavi l'integrale di Laplace

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} \cos(bt)\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-b^2/4a}, \quad (a > 0, \quad b \in \mathbb{R}).$$

Settore 4: matematica applicata.

1. Sia data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -h & k-1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si dica per quali valori di k ed h la fattorizzazione LU di M è possibile.

(b) Per $k = 1 = h$ si calcoli una fattorizzazione LU di M ricorrendo, se necessario, ad una permutazione delle righe.

2. In un piano orizzontale Oxy un'asta OA di lunghezza $2l$ e massa m è vincolata a ruotare attorno all'estremo O. Lungo l'asta scorre un punto materiale di massa M, attratto dal punto O con una forza elastica di constante k. I vincoli sono lisci.

- Scrivere la lagrangiana del sistema ed individuare le costanti del moto.
- Scrivere la lagrangiana ridotta e disegnarne il grafico nello spazio delle velocità.
- Trovare le configurazioni di equilibrio per la lagrangiana ridotta e discuterle come moti del sistema originale.