

NUMERO 1

10/11/2006  
10/11/2006

## ESAME SCRITTO PER IL CONCORSO DI DOTTORATO - XIX CICLO

IL CANDIDATO SVOLGA UNA ED UNA SOLA DELLE DISSERTAZIONI PROPOSTE, ILLUSTRANDO SINTETICAMENTE I CONCETTI, GLI ESEMPI, I RISULTATI PIÙ SIGNIFICATIVI, E LE APPLICAZIONI PIÙ RILEVANTI E RISOLVA INOLTRE ALCUNI DEGLI ESERCIZI PROPOSTI (possibilmente in più settori disciplinari).

### Dissertazioni:

- (A) La geometria dell'applicazione di Gauss di una superficie regolare di  $\mathbf{R}^3$ .
- (B) Il candidato enunci e dimostri qualche teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, confrontando risultati relativi all'integrale di Riemann e risultati relativi all'integrale di Lebesgue.
- (C) Automorfismi di un gruppo  $G$ , automorfismi interni ed esterni.

### Esercizi:

1. Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $K$  di dimensione  $n \geq 3$  e sia  $B = \{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$  una base fissata. Si consideri l'endomorfismo  $f: V \rightarrow V$  tale che

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_i) &= \mathbf{e}_{i+1} \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n-1 \\ f(\mathbf{e}_n) &= 0. \end{aligned}$$

- (a) Verificare che  $f^n = 0$  e  $f^{n-1} \neq 0$ .
  - (b) Scrivere la matrice associata a  $f$  rispetto alla base  $B$  e dedurre che  $f$  non è diagonalizzabile.
2. Sia  $\Sigma$  la superficie rigata descritta da una retta incidente perpendicolarmente l'asse  $z$  che si appoggia all'ellisse  $C$  di equazioni  $x^2 + y^2 - 2ry = x - z = 0$ .
- (a) Scrivere equazione cartesiana ed equazioni parametriche di  $\Sigma$ .
  - (b) Determinare i punti multipli di  $\Sigma$  precisandone il tipo.
  - (c) Vedere se  $\Sigma$  è una rigata sviluppabile oppure sghemba.

3. Sia  $a \in \mathbb{R}$  e sia  $f_a : [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$f_a(x) = \begin{cases} \sqrt{a^2} - a & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ a - \sqrt{a^2} & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Verificare se  $f_a$  è integrabile secondo Riemann (risp. secondo Lebesgue) e, in caso affermativo, calcolare il suo integrale.

4. Sia  $a > -2$ . Provare che il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y - 4x^2 + 2} \\ y(0) = a \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione  $y_a$  di classe  $C^\infty$  in un intorno di 0. Scrivere la formula di MacLaurin di  $y_a$  di ordine 3. Detto  $I$  l'intervallo massimale di definizione di  $y_a$ , provare che  $\sup I = +\infty$ .

5. Sia  $G$  un gruppo ciclico. Dimostrare le seguenti affermazioni:

- (a) Ogni sottogruppo  $H$  di  $G$  è ciclico. Determinare il numero dei generatori di  $H$ .
- (b) Se  $G$  è finito con  $|G| = m < \infty$ , allora per ogni  $n|m$ , esiste un solo sottogruppo di ordine  $n$  in  $G$ .
- (c) La formula della somma finita  $m = \sum_{n|m} \phi(n)$ , dove  $\phi$  è la funzione di Eulero.

6. Per una matrice quadrata  $M$ , si denota con  $M^\#$  la matrice aggiunta di  $M$ . Sia

$$P := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

dove i numeri interi sono interpretati, in un campo specifico, come residui modulari della caratteristica del campo.

- (a) Determinare il campo più piccolo  $K$  tale che esiste una matrice invertibile  $A$  con  $A^\# = P$ ; trovare tutte le matrici  $A$  suddette.
- (b) Verificare se esiste un campo più piccolo di  $K$  tale che esiste una matrice  $B$  con  $B^\# = P$ .