Forcella P. - 7 - 3

TEMA I

Il candidato svolga una ed una sola delle dissertazioni proposte, illustrando sinteticamente i concetti, gli esempi e i risultati piú significativi. Il candidato risolva inoltre alcuni degli esercizi proposti (possibilmente in piú settori).

DISSERTAZIONI

1) Gruppo fondamentale e spazi di rivestimento di un spazio topologico.

2) La convergenza uniforme per successioni di funzioni.

3) Il principio dei lavori virtuali e le sue applicazioni a qualche problema di statica. Solido con punto fisso, solido con asse fisso privo d'attrito, principio di Torricelli.

ESERCIZI

1) Determinare l'ordine e la struttura del gruppo degli elementi invertibili nell'anello delle classi di resto modulo 40.

2) Si verifichi che il gruppo delle isometrie dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$ é costituito da tutte e sole le applicazioni $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ del tipo $f = T + v$ con T trasformazione ortogonale e v vettore di $\mathbb{R}^3$. Si verifichi inoltre che $SO(3)$ (il gruppo delle matrici ortogonali di ordine 3 con determinante positivo) agisce transitivamente sulla sfera $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$.

3) Si considerino la superficie regolare $\Sigma : z = f(x,y)$ con $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, e la superficie $M : x^2 + y^2 = 9$.
(a) Per la superficie Σ, determinare l'operatore forma S_{p_o} e la curvatura gaussiana $k(p_o)$ nel punto $p_o = (0,0,0)$
(b) Determinare (e classificare) le curve $\alpha(s)$, s ascissa curvilinea, di M con vettore accelerazione $\ddot{\alpha}(s)$ normale alla stessa superficie M.

4) Sia f l'endomorfismo di R^4 rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dire se esiste in R^4 un prodotto scalare (definito positivo) rispetto al quale f é un endomorfismo simmetrico. In caso di risposta positiva, si determini un tale prodotto scalare e la matrice che lo rappresenta rispetto alla base canonica.

5) Si consideri il problema di Cauchy (P_a)

$$y' = y^5 - 3y^3 + 1 \qquad y(0) = a$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.
a) Provare che per infiniti valori di a il problema (P_a) ha soluzioni definite in tutto $\mathbb{R}$.

b) Provare che esiste a_0 tale che per ogni $a > a_0$ la soluzione di (P_a) non é definita in tutto $\mathbf{R}$.

c) Cercare di stimare dall'alto e dal basso il valore a_0.

6) Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta > 0$ l'integrale

$$\int_{\mathbf{R}^2} \frac{dx\,dy}{1+|x|^\alpha+|y|^\beta}$$

é finito.

7) Un'asta OA, di lunghezza L e massa trascurabile, é inclinata di un angolo α con $0 < \alpha < \pi/2$ rispetto all'orizzontale e ruota con velocita' angolare costante ω attorno all'asse verticale passante per il suo estremo fisso O. Una seconda asta BC, di lunghezza ℓ e massa m é vincolata in A nel suo punto medio in modo che l'asta BC possa ruotare attorno all'asse OA mantenendosi nel piano perpendicolare ad OA stesso. Scelta come coordinata libera l'angolo θ che l'asta BC forma con la direzione perpendicolare ad OA appartenente al piano verticale di OA:

a) scrivere l'energia cinetica dell'asta;

b) individuare i termini T_2, T_1, T_0;

c) determinare le configurazioni di equilibrio relativo.

8) Una retta r ruota in un piano orizzontale con velocita' angolare costante ω attorno ad un suo punto fisso O. Il centro C di un disco, di massa M e raggio R, scorre lungo l'asse r mentre il disco ruota attorno a C mantenendosi nel piano verticale passante per r. Una molla, di costante elastica k, attrae il punto P della periferia del disco verso il punto O. Scelte come coordinate libere l'ascissa s di C e l'angolo θ che il raggio $P-C$ forma con r:

a) determinare le quantita' T_2, T_1, T_0;

b) scrivere le equazioni differenziali del moto e gli eventuali integrali primi;

c) calcolare le configurazioni di equilibrio relativo.