Dottorato di Ricerca in Matematica e Informatica XXXII Ciclo - Prova Scritta

Il candidato svolga una dissertazione, illustrando sinteticamente i concetti e, per le tracce da (1) a (6), dimostrando un risultato significativo.

(1) Gruppi ciclici.
(2) Spazi topologici compatti.
(3) Invertibilità di funzioni differenziabili in $\mathbb{R}^n$; trattare sia il caso $n = 1$ che quello $n > 1$ mettendone in luce le differenze.
(4) Indipendenza di eventi e variabili aleatorie.
(5) Il problema dei due corpi.
(6) Si discuta del problema dell'integrazione numerica illustrando almeno una famiglia di formule di quadratura e fornendo dettagli sulla convergenza e la stabilità.
(7) Con riferimento ad uno dei seguenti ambiti:
    (a) software;
    (b) hardware;
    (c) reti;

    il candidato descriva un contributo di particolare rilevanza scientifica, mettendone in evidenza gli aspetti concettuali ed innovativi e l'impatto avuto sullo sviluppo del settore.

Il candidato risolva da un minimo di due a un massimo di quattro tra gli esercizi proposti.

Esercizio 1: Sia $f = x^4 + 1$.

(1) Provare che f è irriducibile se considerato come polinomio su $\mathbb{Q}$.
(2) Provare che f non è irriducibile se considerato come polinomio su $\mathbb{R}$.
(3) Provare che f non è irriducibile se considerato come polinomio su un qualunque campo di caratteristica $p > 0$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ e sia f un endomorfismo di V tale che $f^2 = f$.

(1) Provare che $V = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$.
(2) Provare che esiste una base $\mathscr{B}$ di V tale che la matrice $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f)$ associata ad f rispetto a $\mathscr{B}$ sia diagonale con elementi nell'insieme $\{0, 1\}$.

Esercizio 3. Si denoti con $M_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n su $\mathbb{R}$ e con I_n la matrice identica. Inoltre, per ogni $M \in M_n(\mathbb{R})$ si indichi con M^T la matrice trasposta di M.

(1) Provare che $A \in M_n(\mathbb{R})$ commuta con tutte le matrici ortogonali se e solo se $A = \lambda I_n$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) Determinare tutte le matrici $A \in M_n(\mathbb{R})$ tali che $B^T AB = A$ per ogni $B \in M_n(\mathbb{R})$.

Esercizio 4. Si consideri $\mathbb{R}^n$ rispetto alla topologia naturale. Provare che, se $n > 1$, non esiste alcuna funzione continua iniettiva da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$.

Esercizio 5. Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy in $\mathbb{R}^+$,

$$\begin{cases} y' = y^2 - 3y + 2 \\ y(0) = a \end{cases}$$

ammette soluzioni definite in tutto $[0, +\infty[$. In corrispondenza di questi valori tracciarne un grafico qualitativo.

Esercizio 6. Sia $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

(1) Provare che se $|\sin(nx)| \leq a < 1$ allora

$$|\sin(n+1)x| \geq |\sin x|\sqrt{1-a^2} - a$$

e dedurre che, per a sufficientemente piccolo, $|sin(n+1)x| \geq a$.

(2) Usare il risultato precedente per provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n}$$

è divergente.

Esercizio 7. 100 palline indistinguibili vengono distribuite a caso in 10 urne. Qual è la probabilità che almeno un'urna rimanga vuota?

Esercizio 8. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi nel piano verticale sulla parabola di equazione $y = ax^2$, con $a > 0$. L'orientazione dell'asse y è secondo la verticale ascendente. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alla configurazione di equilibrio stabile.

Esercizio 9. Un punto materiale P di massa m è mobile in un piano verticale ed è collegato con una molla lineare, di costante elastica $k > 0$ e lunghezza di riposo nulla, ad un punto fisso O. Inizialmente il punto è fermo alla stessa quota di O e la molla è lunga ℓ. Determinare il moto del punto, specificandone la traiettoria e la legge oraria.

Esercizio 10. Calcolare la fattorizzazione LU (con pivoting parziale) della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 11. Data la funzione $f(x) = \cos^2(2x) - x^2$ scrivere le prime 5 iterazioni del metodo di Newton scegliendo come valore iniziale $x_0 = 0.75$.

Cosa succede se il valore iniziale viene scelto pari a $x_0 = 1.5$? Dare una giustificazione del comportamento osservato.

Esercizio 12. Si consideri il seguente schema di base di dati:

Persona(id, nome, eta, idConiuge)

sul quale vale il vincolo di integrità referenziale:

Persona(idConiuge) $\subseteq$ *Persona(id)*

Il candidato esprima in algebra relazionale ed in linguaggio SQL92 le seguenti interrogazioni:

(1) nome di tutte le persone minorenni;
(2) nome di tutte le persone sposate;
(3) nome di tutte le persone sposate con una persona più vecchia di almeno 10 anni.

Esercizio 13. Descrivere la nozione di macchina di Turing e la nozione di calcolabilità.

Esercizio 14. Il candidato costruisca il modello concettuale in linguaggio UML o entità-relazione (specificando chiaramente quale è la sintassi grafica adottata) per la seguente realtà di interesse.

Una giornata di campionato è composta di varie partite. Ciascuna partita viene giocata da due squadre di calcio in una data fissata in uno stadio fissato. Ogni squadra di calcio ha una rosa di calciatori. Ogni calciatore ha un nome, un ruolo, e un numero di maglia. In ciascuna partita, vengono schierati 11 titolari, e fino a 7 riserve. Durante la partita avvengono fino a tre sostituzioni di un titolare con una riserva. Per ogni partita, i calciatori che hanno giocato ricevono un voto da 1 a 10.

Esercizio 15. Descrivere le principali modalità per il passaggio dei parametri, con particolare riferimento ai linguaggi C e Java.