Esame di ammissione
al Dottorato di Ricerca in Matematica

Università del Salento, 20 settembre 2011, prova A

Norme di svolgimento

Il candidato svolga una, ed una sola, tra le dissertazioni proposte, illustrando sinteticamente i concetti, gli esmepi e i risultati più significativi. Inoltre, il candidato risolva alcuni tra gli esercizi proposti (possibilmente in più settori).

Dissertazioni

1. Funzioni convesse.
2. Il Gruppo fondamentale di uno spazio topologico.
3. Diagonalizzazione di matrici con particolare riguardo a quelle simmetriche.
4. Leggi dei grandi numeri.
5. Meccanica Hamiltoniana.

Esercizi

Settore 1: algebra e geometria

1. Si consideri la curva γ di equazioni $\begin{cases} (y-2)^2+z^2=1 \\ x=0 \end{cases}$. Sia Σ la superficie ottenuta ruotando γ intorno all'asse delle z.

   (a) Riconoscere Σ ed esprimerla con equazioni parametriche. Trovare la curvatura gaussiana K e la curvatura media H di Σ, inoltre discutere il segno di K e di H.

   (b) Dire (giustificando la risposta) se Σ sia omeomorfa alla superficie
   $$\Sigma_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y-2)^2+z^2=1,\, 0 \le x \le 1\right\}.$$

2. Verificare che ogni trasformazione ortogonale di $\mathbb{R}^2$ si può rappresentare con una delle seguenti matrici:
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ con } \theta \in]0,2\pi[\,, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Settore 2: analisi matematica.

1. Si studi il Problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \arctan(y) - x \\ y(\frac{\pi}{4}) = 1 \end{cases}$$
e si tracci un grafico qualitativo della soluzione.

2. Supponiamo che $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ soddisfi $f(x+y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Dimostrare che:

   (a) $f(rx) = rf(x)$ per $x \in \mathbb{R}$ e $r \in Q$;

(b) Se $f(I)$ é limitato per qualche intervallo aperto on vuoto I, allora f è continua in 0;

(c) Se f é continua in 0, allora f é continua in $\mathbb{R}$;

(d) Se f è continua o monotona in $\mathbb{R}$, allora $f(x) = ax$ con $a = f(1)$.

SETTORE 3: MATEMATICA APPLICATA.
Dimostrare che:

1. Nello spazio di probabilità (Ω, F, P) siano Xe Y due variabili aleatorie indipendenti e positive; entrambe sono assolutamente continue con densità f e g, rispettivamente. Si mostri che la variabile aleatoria X/Y ha densità

$$f_{X/Y}(t) = \int_0^{+\infty} y\, g(y)\, f(ty)\, dy\,.$$

   (a) Se la variabile aleatoria X ha legge di Cauchy $C(0,1)$ con densità

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\,,$$

   si trovi la densità φ della variabile $|X|$.

   (b) Se le variabili X e Y sono indipendenti ed hanno entrambe la densità del punto (b), trovi la densità della variabile X/Y.

2. Si calcoli la probabilità che una v.a. binomiale S_n di parametro p assuma valore pari. Si mostri che, quale che sia $p \in \,]0,1[$, tale probabilità tende a $1/2$ al tendere di n a $+\infty$.

Esame di ammissione
al Dottorato di Ricerca in Matematica

Università del Salento, 20 settembre 2011, prova B

Norme di svolgimento

Il candidato svolga una, ed una sola, tra le dissertazioni proposte, illustrando sinteticamente i concetti, gli esmepi e i risultati più significativi. Inoltre, il candidato risolva alcuni tra gli esercizi proposti (possibilmente in più settori).

Dissertazioni

1. Integrale di Riemann.
2. Endomorfismi semplici con particolare riguardo a quelli simmetrici.
3. Forze centrali e Leggi di Keplero.
4. Teorema del limite centrale.
5. Assiomi di separazione e numerabilità negli spazi topologici.

Esercizi

Settore 1: algebra e geometria.

1. Si consideri la superficie Σ parametrizzata da

$$x(u,v) = u\cos v,\ y(u,v) = uv \text{ e } z(u,v) = bv, \text{ dove } b \text{ e una costante non nulla.}$$

   (a) Trovare la curvatura gaussiana K e la curvatura media H di Σ. Si discuta il segno di K e di H. Inoltre, trovare (se esistono) i punti di minimo e di massimo per la curvatura gaussiana K.

   (b) Dire (giustificando la risposta) se le superfici

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\big\} \\ \Sigma_2 &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1,\ (x,y,z)\neq(0,0,1)\big\} \end{aligned}$$

   sono omotopicamente equivalenti.

2. Determinare se esistano $a,b,c\in\mathbb{R}$ tali che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

   risulti ortogonale. Inoltre, si stabilisca (giustificando la risposta) se esistano $a,b,c\in\mathbb{R}$ tali che la matrice A rappresenti una rotazione ed in tal caso determinarne l'asse di rotazione.

Settore 2: analisi matematica.

1. Si studi il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan(y) - x \\ y(\frac{\pi}{4}) = 1 \end{cases}$$

e si tracci un grafico qualitativo della soluzione.

2. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di funzioni definite ponendo:

$$f_1(x) = \sqrt{x},\ f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)} \text{ con } x \geq 0 \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che:

(a) $0 = f_n(0) < f_n(x) < f_{n+1}(x) < 1 + x$ per ogni $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$;

(b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in $[a, b]$ con $0 < a < b < +\infty$ ma non in $[0, 1]$.

Settore 3: matematica applicata.

1. Dimostrare che:

(a) Nello spazio di probabilità (Ω, F, P) siano Xe Y due variabili aleatorie indipendenti e positive; entrambe sono assolutamente continue con densità f e g, rispettivamente. Si mostri che la variabile aleatoria X/Y ha densità

$$f_{X/Y}(t) = \int_0^{+\infty} y\, g(y)\, f(ty)\, dy\,.$$

(b) Se la variabile aleatoria X ha legge di Cauchy $C(0, 1)$ con densità

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}\,,$$

si trovi la densità φ della variabile $|X|$.

(c) Se le variabili X e Y sono indipendenti ed hanno entrambe la densità del punto (b), trovi la densità della variabile X/Y.

2. Un giocatore lancia n volte una moneta equilibrata; ogni volta che ottiene testa un secondo giocatore lancia una moneta equilibrata. Si calcoli la probabilità che il secondo giocatore ottenga k teste.

Esame di ammissione al Dottorato di Ricerca in Matematica

Università del Salento, 20 settembre 2011, prova C

Norme di svolgimento

Il candidato svolga una, ed una sola, tra le dissertazioni proposte, illustrando sinteticamente i concetti, gli esmepi e i risultati più significativi. Inoltre, il candidato risolva alcuni tra gli esercizi proposti (possibilmente in più settori).

Dissertazioni

1. Convergenza uniforme.
2. Trasformazioni ortogonali di uno spazio vettoriale euclideo (reale) e classificazione delle stesse in dimensione 2 e 3.
3. Diagonalizzazione di matrici con particolare riguardo a quelle simmetriche.
4. Probabilità finitamente o numerabilmente additive.
5. Compattezza negli spazi metrici.

Esercizi

Settore 1: algebra e geomtria .

1. Determinare il gruppo fondamentale della circonferenza $\mathbb{S}^1$ usando l'applicazione
$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1, t \longmapsto e^{2\pi i t}.$$
Inoltre, dire (giustificando la risposta) se gli spazi topologici
$$S = \left\{(x, y, y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ (x, y, z) \neq (0, 0, \pm 1)\right\} \text{ e } \mathbb{S}^1$$
sono omotopicamente equivalenti.

2. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard e l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ così definito: $f(x, y, z) = (\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z, y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z)$. Sia inoltre la trasformazione ψ che a (x, y, z) associa il simmetrico rispetto al piano $\pi : x + y = 0$.
   (a) Esplicitare $\psi(x, y, z)$ e dire (giustificando la risposta) se f, ψ e $f^2 \circ \psi$ siano trasformazioni ortogonali.
   (b) Precisare il significato geometrico dell'endomorfismo f e stabilire (giustificando la risposta) se f, f^2 e f^3 siano endomorfismi semplici.

Settore 2: analisi matematica.

1. Si studi il Problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \arctan(y) - x \\ y(\frac{\pi}{4}) = 1 \end{cases}$$
e si tracci un grafico qualitativo della soluzione.

2. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la successione di funzioni su $\mathbb{R}$ definita ponendo:

$$f_1(x) = \sin x,\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt \text{ con } x \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

e calcolarne la somma.

SETTORE 3: MATEMATICA APPLICATA.

1. Un giocatore lancia n volte una moneta equilibrata; ogni volta che ottiene testa un secondo giocatore lancia una moneta equilibrata. Si calcoli la probabilità che il secondo giocatore ottenga k teste.

2. Si calcoli la probabilità che una v.a. binomiale S_n di parametro p assuma valore pari. Si mostri che, quale che sia $p \in]0,1[$, tale probabilità tende a $1/2$ al tendere di n a $+\infty$.