DOTTORATO DI RICERCA
IN MATEMATICA E INFORMATICA
UNIVERSITÀ DELLA BASILICATA E DEL SALENTO
XXXIV CICLO
PROVA SCRITTA

Si scelga tra la parte Matematica e quella Informatica.
Tempo a disposizione: 4 ore

MATEMATICA

Il candidato svolga una tra le seguenti dissertazioni, illustrando sinteticamente i concetti e dimostrando almeno un risultato significativo.

1. Teoremi di esistenza e unicità per equazioni differenziali.

2. Forme differenziali.

3. Campi finiti.

4. Simmetrie -e loro rotture- nelle meccaniche (e.g. analitica, statistica, etc.).

5. Si consideri una moltitudine statistica di N molle identiche, indipendenti, ognuna di massa $M_i \equiv M$, $i = (1, ..., N)$, di costante elastica $K_i \equiv K$, $i = (1, ..., N)$, e di lunghezza a riposo nulla, immerse in un bagno termico a temperatura T. Queste sono stabilmente allungate rispetto alle loro posizioni di equilibrio, per una certa lunghezza $\bar{x}_i = \bar{x} \pm \epsilon_i$ piccola e simile ma non identica per ogni molla (tale incertezza sulla precisa deformazione i-esima rispetto ad $\bar{x}$ è racchiusa negli ϵ_i, numeri casuali estratti da una distribuzione uniforme in $\{-\sqrt{\bar{x}}/2, +\sqrt{\bar{x}}/2\}$).
   Ognuna di queste molle incamera quindi un'energia (potenziale) $E_i = \frac{1}{2}K\bar{x}_i^2$ ed è definibile l'energia media del sistema.
   Ricordandoci che la configurazione di equilibrio termodinamico (forzato) di queste molle, cioè la configurazione di massima entropia, è data dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann $\rho(x) \sim e^{-E(x)/T}$, si legga questa legge legando il Teorema del Limite Centrale in Probabilità alla linearità delle forze nella Meccanica, commentando opportunamente (ma stringatamente).

6. L'Equazione di Fourier: derivazione (euristica) microscopica, derivazione (euristica) macroscopia, soluzione (comunque semplice, e.g. partendo da una delta) e coerenza del quadro totale che ne emerge.

7. Operatori unitari di spazi euclidei e di spazi hermitiani.

8. Forme quadratiche.

Il candidato risolva un massimo di quattro esercizi.

Algebra e geometria

Esercizio 1. Si consideri il gruppo additivo degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$ e N il suo sottogruppo generato da $1-i$.

(1) Dimostrare che il gruppo $G := \mathbb{Z}[i]/N$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

(2) Dimostrare che ogni sottogruppo di G è ciclico.

(3) Determinare un generatore per ogni sottogruppo di G.

Esercizio 2. Siano $\mathbb{F}_3$ il campo di 3 elementi, $f := x^4 + x^3 + x^2 - 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ e $J := (f)$. Posto $A := \mathbb{F}_3[x]/J$,

(1) provare che A non è un campo;

(2) determinare gli elementi nilpotenti di A;

(3) provare che $x^2 + 1$ è invertibile;

(4) elencare tutti gli ideali di A.

Esercizio 3. Provare che ogni cubica piana reale non-singolare ha una retta di simmetria.

Esercizio 4. Nel piano reale, sia data la curve $\mathcal{C}$ di equazione

$$4(1-xy)(y^2-1)-(x-y)^2 = 0.$$

Studiare $\mathcal{C}$ (i punti singolari e loro natura, simmetrie, asintoti, grafico) e determinare una sua rappresentazione parametrica razionale.

Esercizio 5. Siano A, B matrici quadrate di ordine n a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ ed I la matrice identica dello stesso ordine n. Provare che se $\mathbb{K}$ ha caratteristica 0, allora $AB - BA = I$ non è possibile. Si estende questo risultato al caso di caratteristica positiva? Giustificare la risposta.

Analisi matematica e probabilità

Esercizio 1. Stabilire per quali valori $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n > -1,\ \gamma \in \mathbb{R}$ il seguente integrale

$$\int_{\{|x_i|\geq 1\ \forall\ i=1,\ldots,n\}} \frac{|x_1|^{\alpha_1}\cdots|x_n|^{\alpha_n}}{|x|^{\gamma}} dx_1\ \ldots dx_n$$

risulta convergente.

Esercizio 2. Sia

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dt.$$

(i) Trovare il dominio di F, dimostrare che F è continua, calcolare $F(0)$.

(ii) Dimostrare che F è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(iii) Dedurre un'equazione differenziale lineare del primo ordine per $F_{|]0,+\infty[}$ e da questa ottenere per F una forma in cui non compaiono integrali.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soddisfacente le seguenti proprietà

(i) f continua in 1;

(ii) $f(1) = 1$;

(iii) $f(x^2) = xf(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Dedurre altre proprietà soddisfatte da f, provare che esiste un'unica funzione che verifichi (i), (ii) e (iii) e cercare di determinarla.

Esercizio 4. Andrea entra in un bar dove ritrova un suo vecchio amico, Antonio (che in realtà nel mentre è diventato un baro professionista), il quale lo sfida a giocarsi la colazione ad un dato gioco d'azzardo binario (e.g. *testa o croce*). Andrea non sospetta minimamente la malafede di Antonio e così accetta, e perde.
Il secondo giorno lo stesso fenomeno si ripresenta e così via giorno dopo giorno i due giocano, Andrea perde.
Impostando un approccio Bayesiano alla descrizione del gioco, si assuma per semplicità che Andrea vinca con probabilità equa (cioè, in ogni partita, vinca

o perda con probabilità un mezzo) mentre Antonio vinca sempre con probabilità 1, in ogni partita.
Si assuma inoltre che Andrea prima della prima partita (come condizione *aprioristica*) creda onesto Antonio al 95% (cioè che Andrea si fidi molto, inizialmente, dell'amico, attribuendogli una probabilità a priori che sia un baro pari al 5%).
Stimare dopo quanti giorni Andrea inizia a pensare che, con probabilità almeno del 70%, Antonio sia invece un baro.

Esercizio 5. Si lancino due monete non truccate, una bianco ed una rosso. Si considerino i tre eventi:

- A = sulla moneta bianca esce testa.
- B = sulla moneta rossa esce croce.
- C = le due facce delle due monete (quella sulla moneta bianca e quella sulla moneta rossa) sono uguali (sono cioè entrambe testa o entrambe croce).

Si risponda alle seguenti domande:

- gli eventi A e B sono indipendenti?
- gli eventi A e C sono indipendenti?
- gli eventi B e C sono indipendenti?
- gli eventi A, B e C sono indipendenti?

Fisica Matematica

Esercizio 1. Due pendoli, di lunghezza L_1 ed L_2 e massa m_1 ed m_2 rispettivamente, sono collegati da una molla di costante elastica K, la cui lunghezza a riposo coincide proprio con la distanza tra i perni del telaio dei due pendoli $d = \overline{AB}$ (come abbozzato in Figura 1) e sono sottoposti alla forza del campo gravitazionale (che si esercita lungo l'asse Y nella figura).
Il punto Q nella figura è il punto in cui la molla si attacca al primo pendolo ed è tale che $\overline{AQ} = L_2$.
Si provi, dopo aver scritto e risolto le equazioni di Lagrange per questo sistema dinamico, che la configurazione di minima energia corrispondente ai

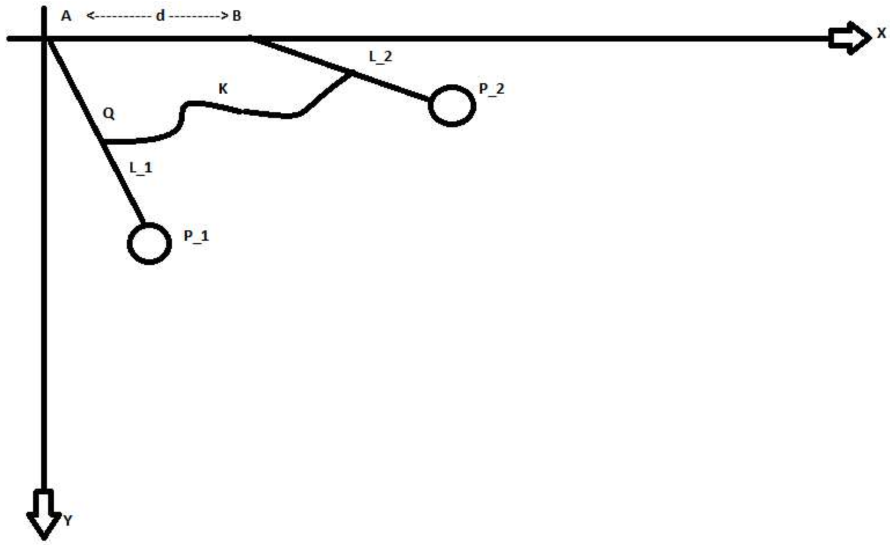

Figura 1: rappresentazione stilizzata del sistema dinamico composto dai due pendoli, legati da una molla.

pendoli *in verticale* (cioè paralleli all'asse Y) sia un punto di equilibrio stabile e si scriva la Lagrangiana associata alle piccole oscillazioni attorno a tale minimo.

INFORMATICA

Il candidato scelga una delle seguenti tematiche e dopo averne data una adeguata introduzione, illustri lo stato dell'arte in termini di avanzamento della conoscenza e di novità degli apporti più significativi.

1. Basi di dati e Sistemi Informativi Intelligenti
2. Ingegneria del Software
3. Algoritmi e Strutture Dati
4. Grafica e Visualizzazione Scientifica

5. Reti e Sistemi Distribuiti

Il candidato risolva un massimo di quattro esercizi.

Esercizio 1. Descrivere le strutture dati stack, code e liste concatenate illustrando le operazioni possibili su ognuna.

Esercizio 2. Descrivere un algoritmo di ordinamento in tempo lineare.

Esercizio 3. Descrivere le nozioni di classe, oggetto e riferimento nei linguaggi orientati agli oggetti.

Esercizio 4. Descrivere il funzionamento del protocollo TCP.

Esercizio 5. Descrivere il funzionamento delle trasformazioni nella grafica 3D.